

科学オリンピックへの道
岡山物理コンテスト 2013
問題 B

2013 年 10 月 26 日 (土)
11:25～12:35 (70 分)

問題にチャレンジする前に次の＜注意事項＞と＜指数を用いた数の表記＞をよく読んでください。
問題は大問 3 題からなります。問題は一見難しく見えても、よく読むとわかるようになっています。
どの問題から取り組んでも結構です。最後まであきらめずにチャレンジしてください。

＜注意事項＞

1. 開始の合図があるまで、問題冊子（全 14 ページ）を開けてはいけません。
2. 電卓を使用してもよろしい。
3. 携帯電話などの電源は切り、カバンの中にしまっておきなさい。
4. 解答はすべて解答用紙に記入しなさい。また、解答用紙 3 枚すべてに、必ずチャレンジ番号と名前を記入しなさい。
5. 気分が悪くなったりトイレに行きたくなったりしたとき、または質問があるときは手を挙げて監督者に知らせなさい。
6. 終了の合図があったら、ただちに解答を止め、チャレンジ番号と名前を確認の上、監督者の指示を待ちなさい。
7. 問題冊子は持ち帰りなさい。

＜指数を用いた数の表記＞

大きい数や小さい数を扱うときには、指数表記を利用することが多い。

$$1.2 \times 10^3 = 1.2 \times 10 \times 10 \times 10 = 1200 \quad 1.2 \times 10^{-3} = 1.2 \times \frac{1}{10^3} = \frac{1.2}{1000} = 0.0012$$

指数表記では、一般に $a \times 10^n$ ($1 \leq a < 10$) の形で表す。
このように記述することで、大きな数や小さな数を簡潔に表現できる。

【例】 地球から太陽までの距離 $= 150000000 \text{ km} = 1.5 \times 10^8 \text{ km}$
電子の質量 $= 0.000000000000000000000000000091 \text{ kg} = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$

第1問

球技において、使用するボールがどの程度はね返るかは、そのゲームを大きく左右する。例えば、軟式野球のボールは、高さ 150cm から大理石板に落下させたときのはね返った高さで基準を決めている。このはね返りの程度は反発係数 e で示され、これは以下のように求められる。

$$\text{(反発係数)} e = \frac{\text{(衝突後の速さ)} v}{\text{(衝突前の速さ)} v_0}$$

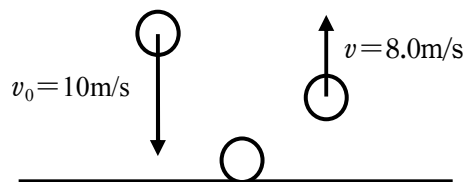


図1

例えば、図1のように、10m/s で衝突し、8.0m/s ではね返れば、 $e=0.80$ である。

日本のプロ野球で使用する公式球の反発係数は 0.41~0.44 と決められている。打球の飛距離にこの反発係数がどの程度影響を与えるかについて考えてみよう。さらに、地球の自転による影響についても考えてみよう。

地球規模での運動を考える場合には、我々が地球とともに回転運動しながら物体の運動を観測するために、見かけ上の力が生じることが知られている。この力は、フランス人科学者のコリオリにちなみ「コリオリの力（転向力）」と呼ばれる。例えば、台風が北半球で反時計回りの渦を巻くのは、風が低気圧の中心に向かって進む際にコリオリの力を受け、中心から右にずれた地点に到達するためである。また、海流の流れる向きもこの力に影響されると考えられている。このコリオリの力が打球に与える影響についても考察してみよう。

空気や摩擦、ボールの大きさによる影響はないものとして以下の問い〔A〕,〔B〕に答えなさい。ただし、重力加速度 g の大きさを 10m/s^2 とし、必要であれば、 $\sqrt{2}=1.41$ として計算しなさい。

〔A〕 地球の自転による影響（コリオリの力）を考えない場合

問1 ピッチャーの投げるボールが 144km/h であったとする。この速さは何 m/s か。

次に、打球の高さについて見積もってみよう。
必要があれば、次の関係式を利用しなさい。

$$\begin{aligned} \text{質量 } m \text{ [kg] , 速さ } v \text{ [m/s] の物体がもつ運動エネルギー } K &= \frac{1}{2} m v^2 \text{ [J]} \\ \text{基準面より高さ } h \text{ [m] の位置で物体がもつ重力による位置エネルギー } U &= m g h \text{ [J]} \end{aligned}$$

問2 真上にボールを 80m の高さまで打ち上げる場合、このボールの初速度（打った直後の速さ）は何 m/s であればよいか。

問3 次に、ピッチャーがボールを鉛直下向きに床へ投げつけると、ボールは床から何 m の高さまではね上がるか。ただし、ボールと床の反発係数を 0.41 とし、ボールは床に 144km/h の速さで鉛直下向きに衝突したとする。

次にバッターがボールを打ち返し、図2のような放物線を描き、飛んだとしよう。放物運動は、水平方向に等速直線運動、鉛直方向に重力加速度 g による等加速度直線運動をしていると考えることができる。ボールとバットが当たった点とグラウンド面からの高さは、捕球した点のグラウンド面からの高さと同じと考え、以下の各問いに答えよ。

ただし、このとき打ち返された直後のボールは、水平方向から鉛直上方へ 45° 傾いた向きに飛び出され、水平成分は 25m/s であったとする。

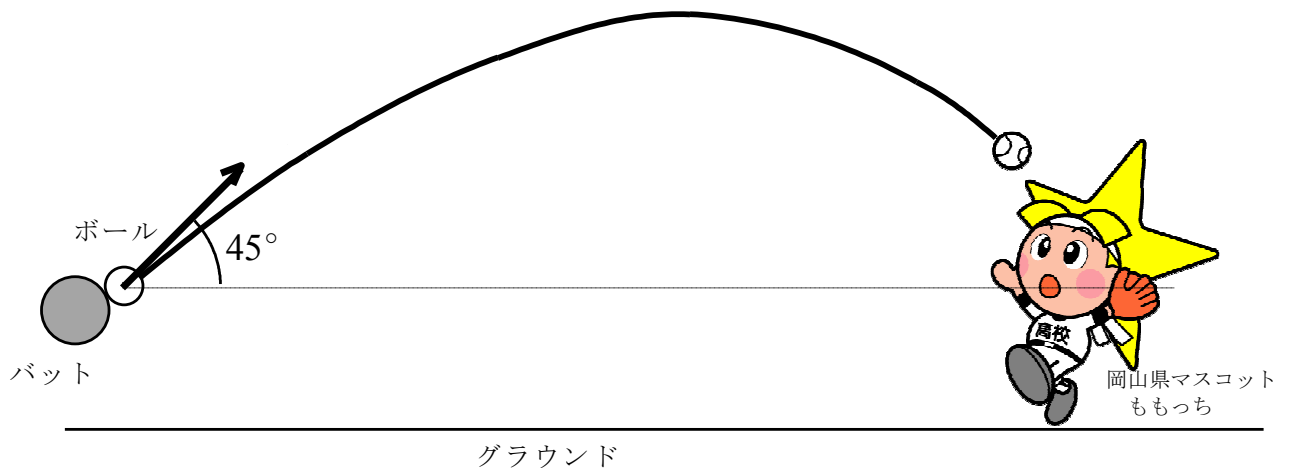


図2

- 問4 衝突して飛び出したボールの鉛直成分の大きさと初速度の大きさは、それぞれ何 m/s か。
- 問5 飛び出したボールが捕球されるまでの時間 $[\text{s}]$ はいくらか。
- 問6 ボールがバットに衝突した位置から、捕球されるまでの水平距離 $[\text{m}]$ はいくらか。
- 問7 反発係数が少し大きいボールに変えたとき、飛び出したボールの初速度の水平成分が 1.0m/s 大きかったとすると、ボールは問6に比べて何 m 遠くへ飛ぶことになるか。ただし、鉛直成分の変化は考えないものとする。

〔B〕 地球の自転による影響（コリオリの力）を考える場合

北極の上空から地球を見ると，地球は反時計回りに 24 時間で一周している。図3のように，半径 200km の円盤が北極点を中心に反時計回りに 24 時間で一周する場合をイメージしてみよう。物体が，円盤の中心から半径に沿って外向きに，100km/h で飛び出したとする。

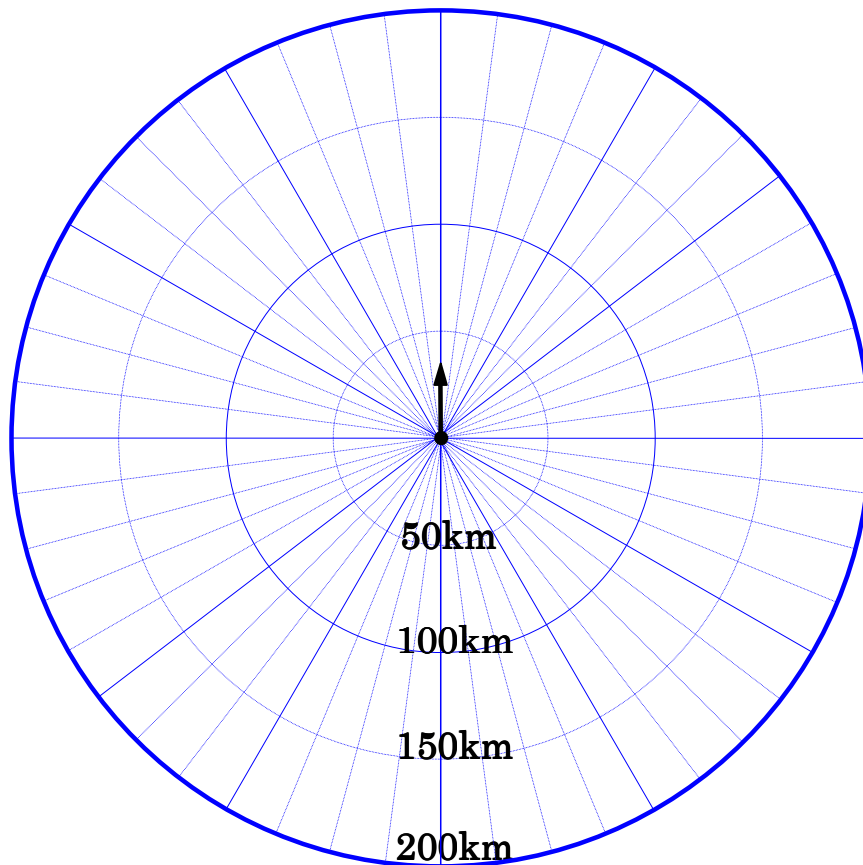


図3

問8 円盤上に静止している人にとって，物体の飛んでいく軌跡（通った道筋）はどのように見えるだろうか。物体が北極点を飛び出してから 2.0 時間までの物体の軌跡を図3に実線で記入せよ。ただし，図3には，円盤の中心から半径 50km ごとに同心円が，また中心角 7.5°ごとに半径が，それぞれ示されている。

問9 実際には北極点で野球をすることは難しいが，仮に北極点で問4～6のようにボールを飛ばしたとき，ボールの落下地点は，地球の自転による影響を考えた場合と，考えない場合では何 m ずれるか。

このように，自転している地球上では，ボールの落下点が少しずれる。しかし，実際の生活において，コリオリの力は重力と比較して非常に小さく，その影響はほとんどない。長距離での軌道計算においてはコリオリの力についての補正が必要になる。

<以下余白>

第2問

ライフセーバー（人命救助隊）が、海でおぼれている人を見つけたとき（図1），最も短い時間で助けにいくためには，どのような経路を通ればいいだろうか。

ライフセーバーは自分の位置からおぼれている人の位置（救助ポイント）まで直線的に移動するよりも，砂浜を走る距離を長くして，泳ぐ距離を短くしたコースを選ぶ方が時間的に早く救助ポイントに到達できる。

最短時間で目的地に到達できるコースは，どのようにすれば求められるだろうか。以下のとおりライフセーバーの進むコースをモデル化して考えてみよう。

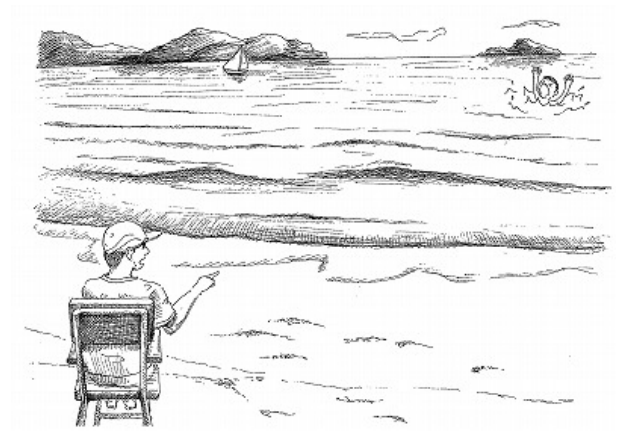


図1

図2のように，ライフセーバーの位置を点O，救助ポイントを点Qとして，幅4mの平行な砂浜と海を考え，点Oから点Qに最短時間で移動する場面を考える。

まず最初に，実際に数値計算をして確かめてみよう。この場合，砂浜では速さ2m/sで進むことができ，海では速さ1m/sで泳いで進むことができるとする。RPの長さを x [m]とし， x の値を1mずつ変えて，OP間を進むのに要する時間を t_1 [s]，PQ間を進むのに要する時間を t_2 [s]， t_1 [s] + t_2 [s] を T [s] として，表を得た。

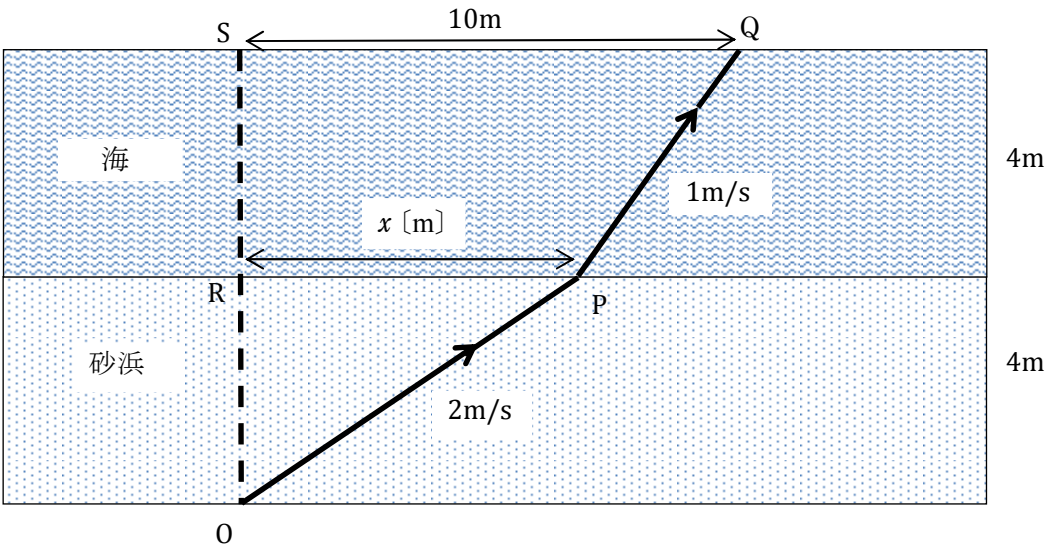
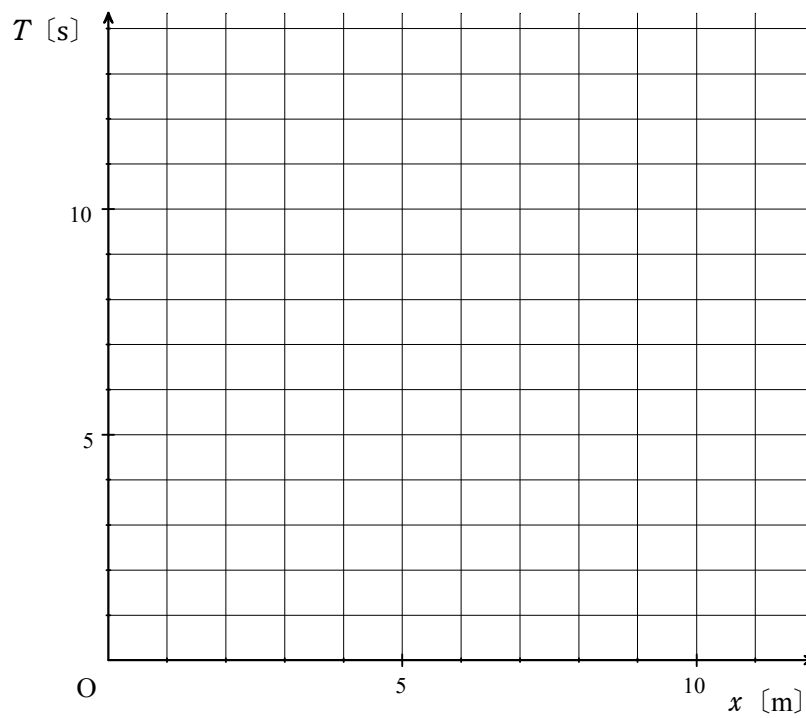


図2

表

x [m]	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t_1 [s]	2.00	2.06	2.24	2.50	2.83	3.20	3.61	(ㄲ)	4.47	4.92	5.39
t_2 [s]	10.8	9.85	8.94	8.06	7.21	6.40	5.66	(ㄱ)	4.47	4.12	4.00
T [s]	12.80	11.91	11.18	10.56	10.04	9.60	9.27	(ㄴ)	8.94	9.04	9.39

グラフ



問1 表の空欄(ア)～(ウ)に適切な数値を入れて表を完成させなさい。

問2 表のデータを用いて解答欄のグラフ用紙のグラフを完成させなさい。

問3 このグラフから $T \text{ [s]}$ が最短となる $x \text{ [m]}$ を予想しなさい。

次に RP の長さを x で表し、数式から最短時間を計算してみよう。

問4 T を x を用いた式で表しなさい。

表やグラフをみると、 T [s] が最短となる x (点 P) の近くの (点 P') $x \pm \Delta x$ (Δx は x に比べて非常に小さな値である。) においても、 T [s] にはほとんど変化がないことが分かる。これを式で表せば、

$$T(x \pm \Delta x) \doteq T(x) \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。この性質を用いて多くの物理法則が説明されている。この方法を変分法という。

問5 問4で求めた式と①の関係式を変分法に基づいて解くと次の式が得られる。

$$\frac{x}{2\sqrt{x^2+16}} = \frac{10-x}{\sqrt{(10-x)^2+16}}$$

この式から、求められる x の値は問3で予想した値と一致することを示しなさい。

フランスの数学者のフェルマーは「最短時間で到達できる経路が、実際に観測できる光の通る道筋である」と説明した。これをフェルマーの原理という。光の反射や屈折の法則はこの原理が成り立っている例の一つである。

<以下余白>

第3問

人や自転車，自動車などがカーブを曲がる時の速度や加速度，力などについて考えてみよう。
必要があれば，次の□内の関係式や図を参考にしなさい。

角度を表す方法として，度数法と弧度法がある。度数法は一周の角度を 360° とする。弧度法では一周の角度を 2π [rad] (ラジアン) とする。したがって，弧度法では，図 A のように弧の長さが半径 r と等しくなる時の中心角は 1 rad となる。

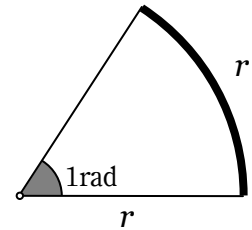


図 A

このことから，弧の長さ L は，半径 r と弧度法で表した中心角 θ を用いて，次のように表されることがわかる。(図 B)

$$L = r \theta$$

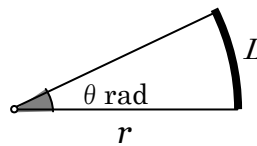


図 B

例えば図 C で，半円の中心角は， 180° であるが，弧度法では，半径が r で半円周の長さが πr であるから，

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{L}{r} \\ &= \frac{\pi r}{r} \\ &= \pi \end{aligned}$$

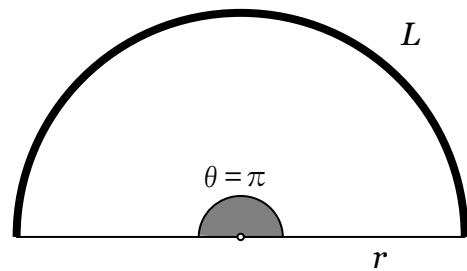


図 C

となる。

問1 図1のように，等しい速さ v で半径 r の円弧上を運動する場合を考えてみよう。角速度 (単位時間あたりの中心角) を ω (オメガ) [rad/s] とすると， t 秒間に物体が描く中心角 (回転角) θ は， ωt [rad] となる。

一般に，速さ v は，「移動距離／経過時間」で表される。円弧上を運動する物体の速さ v を r と ω を用いて表しなさい。

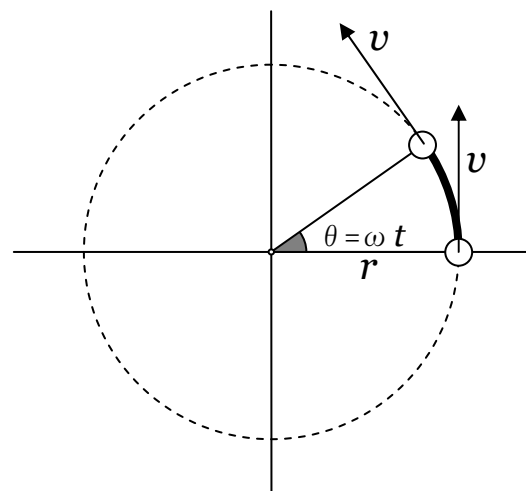


図1

物体が円運動するためには、常に円の中心に向かう力が作用し続ける必要があり、これを「向心力」という。ニュートンの運動の法則が示すように、力を受けた物体は力の向きに加速される。すなわち、向心力のはたらく物体は、円の中心に向かう加速度（向心加速度）をもち、加速されている。ただし、加速度は、単位時間当たりの速度変化であり、[加速度＝速度の変化／経過時間]で表される。

問2 問1と図2を参考にして、等しい速さ v （ $\vec{v}_0$ 、 $\vec{v}$ の大きさはいずれも v ）で半径 r の円運動をする物体の加速度の大きさ a を v と ω で表せ。また、 a を r と v で表せ。

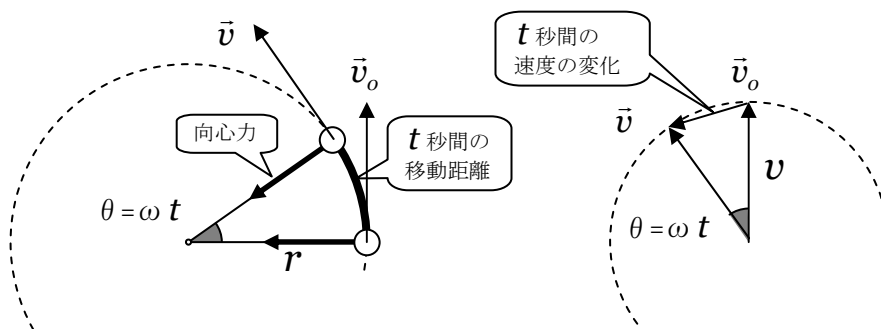


図2

問3 等速円運動では向心力を受けているにもかかわらず、物体の速さが一定である。これを正しく説明しているのは、①～③のうちではどれか。一つ選び番号で答えよ。

- ① 慣性の法則によって、向心力がはたらく場合でも、速度が一定に保たれる。
- ② 加速されているが、軌道が円なので、見かけ上速さが一定となる。
- ③ 加速度は、速度の向きに直角に生じるため、速度の向きは変化するが、大きさは変わらない。

陸上競技場の第3レーン（内側から3番目のコース）の半径は約40mであり、世界トップクラスの短距離走者は約10m/sで駆け抜ける。（図3）

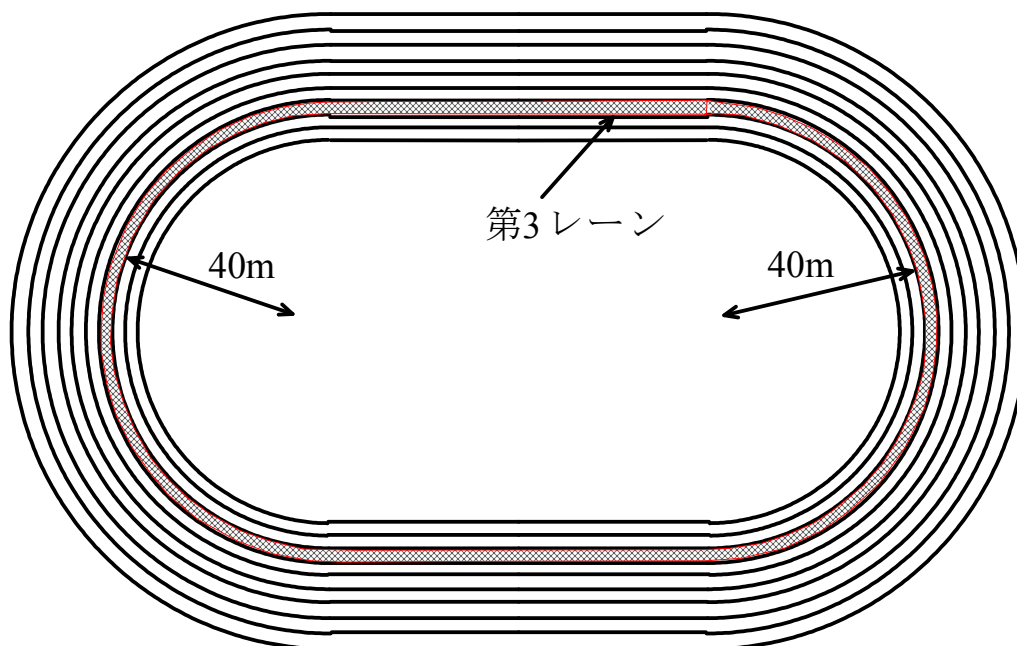


図3

普通の人がこのような速さで走ることは不可能だが、自転車を使えば走れそうである。自転車に乗った自分を想像しながら考えて欲しい。図4のように、自転車に作用する力のうち、速度 $\vec{v}$ に垂直な鉛直面（図4の紙面）に沿ってはたらく力（地球からの重力と路面からの抗力）を考えてみよう。

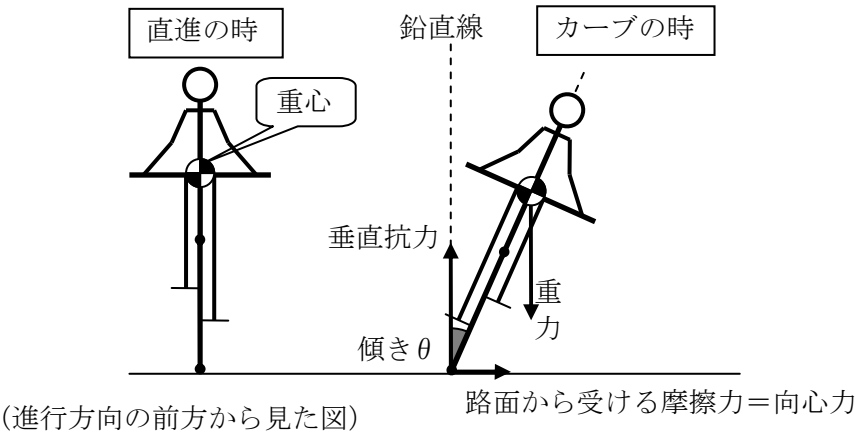


図4

直立して直進しているときの抗力は、垂直抗力だけである。カーブを曲がるために自転車を傾けると、路面から受ける摩擦力による、抗力の水平成分が生じる。自転車は、この力を向心力として、円軌道上を走ることができる。

問4 自転車が 10m/s で第 3 レーン（半径 40m）を走るとき、自転車の傾き θ はいくらになるか。下の表を利用して答えよ。ただし、重力加速度の大きさは 9.8 m/s² とする。

表 『(向心力)÷(垂直抗力)』と『自転車の傾き θ 』の関係

向心力 垂直抗力	θ [rad]	θ [度]
0.00	0.000	0.0
0.01	0.010	0.6
0.02	0.020	1.1
0.03	0.030	1.7
0.04	0.040	2.3
0.05	0.050	2.9
0.06	0.060	3.4
0.07	0.070	4.0
0.08	0.080	4.6
0.09	0.090	5.1

向心力 垂直抗力	θ [rad]	θ [度]
0.10	0.100	5.7
0.11	0.110	6.3
0.12	0.119	6.8
0.13	0.129	7.4
0.14	0.139	8.0
0.15	0.149	8.5
0.16	0.159	9.1
0.17	0.168	9.6
0.18	0.178	10.2
0.19	0.188	10.8

向心力 垂直抗力	θ [rad]	θ [度]
0.20	0.197	11.3
0.21	0.207	11.9
0.22	0.217	12.4
0.23	0.226	13.0
0.24	0.236	13.5
0.25	0.245	14.0
0.26	0.254	14.6
0.27	0.264	15.1
0.28	0.273	15.6
0.29	0.282	16.2

向心力 垂直抗力	θ [rad]	θ [度]
0.30	0.291	16.7
0.31	0.301	17.2
0.32	0.310	17.7
0.33	0.319	18.3
0.34	0.328	18.8
0.35	0.337	19.3
0.36	0.346	19.8
0.37	0.354	20.3
0.38	0.363	20.8
0.39	0.372	21.3

次に、図5の左図のように、ホームストレート（直線軌道）から第3レーンの曲走路（半径40m）を経て、バックストレート（直線軌道）を走る場合について考えてみよう。平行な二つの直線軌道はいずれも曲走路の接線であり、接点を点A、点Bとする。これを自転車で10 m/s の等速で通過した場合、時間を横軸、向心加速度の大きさを縦軸にとってグラフを描くと図5の右図のようになる。

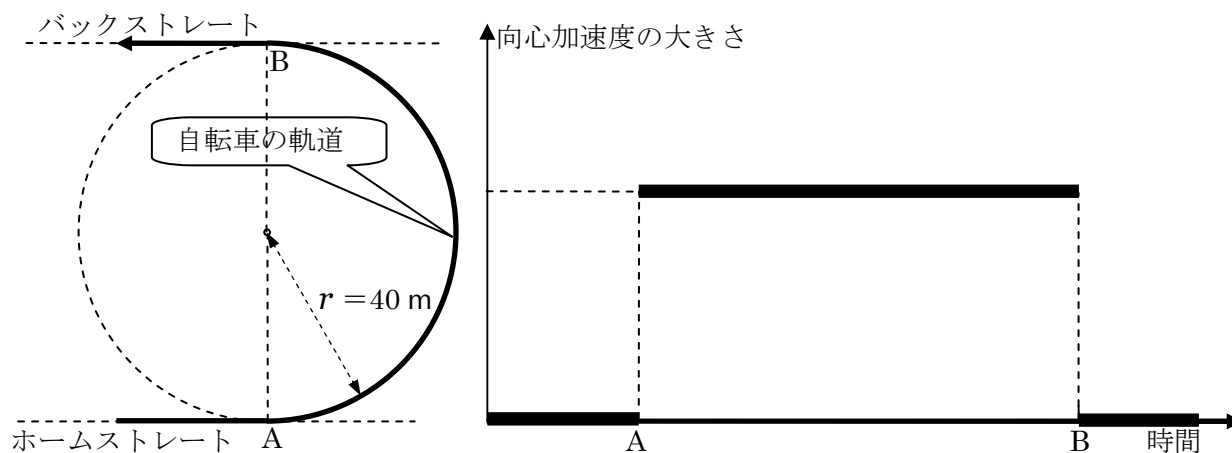


図5

図5のように、ホームストレートを通過した後、A点から突然、向心力が必要となり、B点で不要となる。正確にこの軌道に沿って等速で移動しようとする、直進していた自転車は、A点で急激に、問4で求めた角度だけ傾ける必要がある。しかし、実際にはこのような動作は不可能であり、走行軌跡が膨らんでレーンからはみ出さないように、徐々に自転車を傾ける必要がある。

そこで、自転車の速さを 10m/s に保ったまま、図6-1, 2のように、徐々に向心加速度の大きさを変化させて、安全で快適に通過できる軌道を次のように考えた。

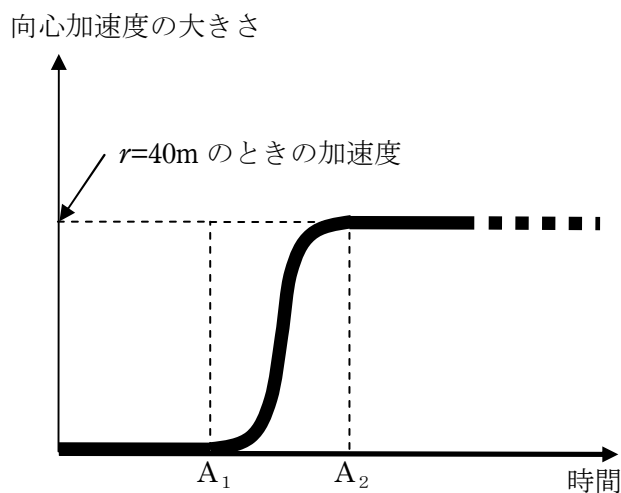


図6-1

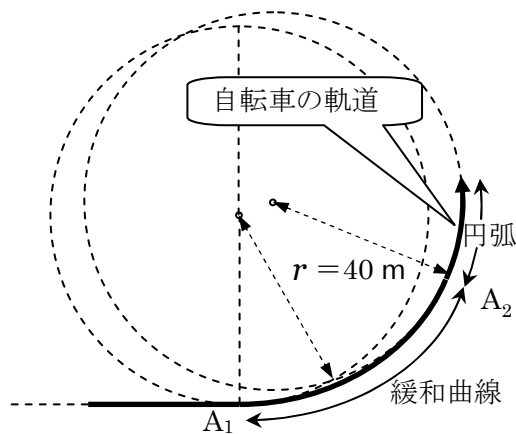
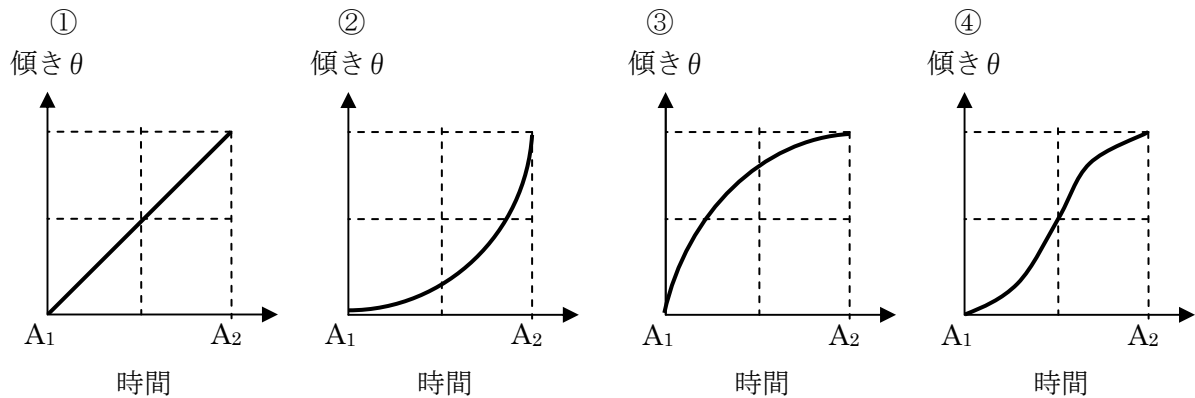


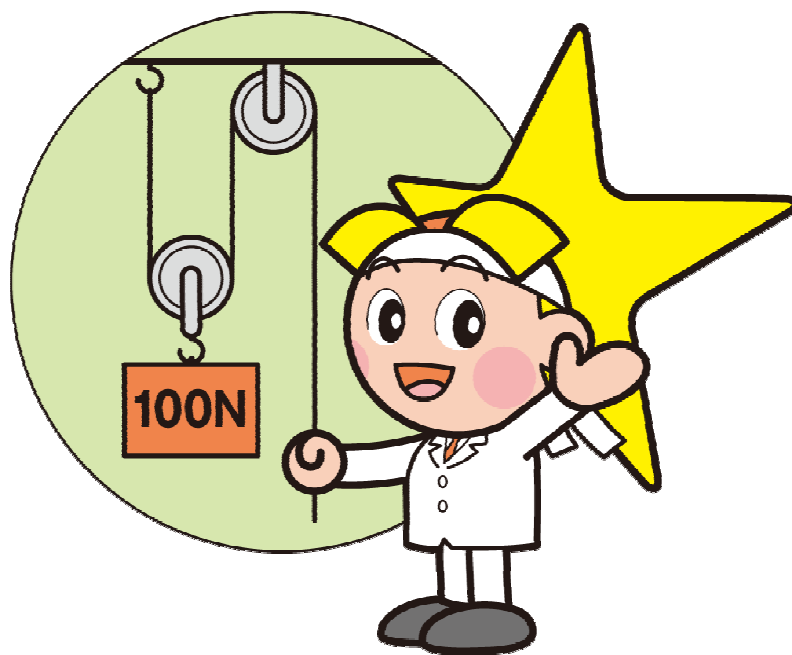
図6-2

問5 図6-1のように向心加速度を A_1 から A_2 まで変化させて走行したとき、自転車の傾きはどのように変化するだろうか。最も適するものを次の①～④の中から一つ選び番号で答えよ。



実際の道路（峠道のカーブやインターチェンジなど）やレール（鉄道やジェットコースターなど）では向心加速度が徐々に変化する曲線が直線と円弧の間に挿入されている。実際には3次曲線やサイン半波曲線、クロソイド曲線などが用いられている。

<以下余白>



岡山県マスコット ももっち