科学オリンピックへの道

岡山物理コンテスト 2015

問題Ｂ

2015 年 11 月 8 日（日）

11:25～12:35（70 分）

問題にチャレンジする前に次の＜注意事項＞と＜指数を用いた数の表記＞をよく読んでください。

問題は大問３題からなります。問題は一見難しく見えても，よく読むとわかるようになっています。

どの問題から取り組んでも結構です。最後まであきらめずにチャレンジしてください。

＜注意事項＞

１．開始の合図があるまで，問題冊子（全 13 ページ）を開けてはいけません。
２．電卓を使用してもよろしい。
３．携帯電話などの電源は切り，カバンの中にしまっておきなさい。
４．解答はすべて解答用紙に記入しなさい。また，解答用紙 3 枚すべてに，必ずチャレンジ番号と名前を記入しなさい。
５．気分が悪くなったりトイレに行きたくなったりしたとき，または質問があるときは手を挙げて監督者に知らせなさい。
６．終了の合図があったら，ただちに解答を止め，チャレンジ番号と名前を確認の上，監督者の指示を待ちなさい。
７．問題冊子は持ち帰りなさい。

＜指数を用いた数の表記＞

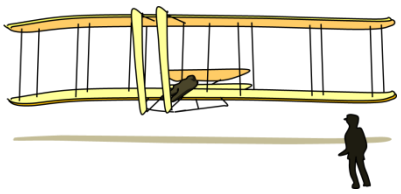
大きい数や小さい数を扱うときには，指数表記を利用することが多い。

$$1.2\times10^{3}=1.2\times10\times10\times10=1200 \qquad 1.2\times10^{-3}=1.2\times\frac{1}{10^{3}}=\frac{1.2}{1000}=0.0012$$

指数表記では，一般に $a\times10^{n}$ （$1\leqq a<10$）の形で表す。
このように記述することで，大きな数や小さな数を簡潔に表現できる。

【例】　地球から太陽までの距離 $=150000000\ \mathrm{km}=1.5\times10^{8}\ \mathrm{km}$
電子の質量 $=0.00000000000000000000000000000091\ \mathrm{kg}=9.1\times10^{-31}\ \mathrm{kg}$

第１問



人類が初めて動力飛行機で空を飛んだのは 112 年前の 1903 年の 12 月 17 日，ライト兄弟が最初と言われている。今では，800 人以上を一度に乗せて空を飛ぶことができる巨大な飛行機が就航している。しかし，不思議なのは，重い機体がどうして空を飛ぶことができるのかである。ここでは，問題を解きながら，飛行機が空を飛ぶ原理を考えてみよう。

まず，飛行機について考える前に，感覚的にわかりやすい飛行船や気球が飛ぶ原理を考えてみよう。人類初の有人飛行を成功させた気球は，フランスのモンゴルフィエ兄弟による熱気球である。フランスのシャルルも水素ガスを詰めた「ガス気球」で飛行を成功させている。これらの気球は浮力を利用したものである。この浮力について，まず考えてみよう。

問１　空気中に静止している**図１－１**のような物体が受ける浮力の大きさを，次のようにして求めた（　　）内に入る式または語句をそれぞれ答えなさい。

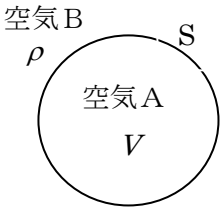


図１－１

密度 ρ の空気中に，球面 S で囲まれた体積 V の空気Aを考える。それ以外の部分を空気 B とする。

空気 A の質量 m は，

m＝（　1　）

と表せるから，空気 A にはたらく重力の大きさ F は，重力加速度を g として，m を用いないで表すと，

F＝（　2　）

となる。空気 A は静止しているから，重力と浮力がつりあっていると考えられる。したがって，空気 A にはたらく浮力の大きさは F に等しいと考えてよい。

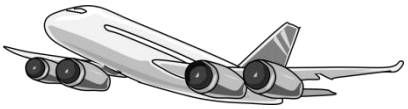
この浮力は，空気 A と同じ大きさ・形状の他の物体に置き換えても同じと考えられるので，「空気や水などの流体中の物体は，それが排除している流体の重さに等しい大きさの浮力を受ける」と一般的には表すことができる。これを発見者にちなんで（　3　）の原理という。

問２　気球は高さ約 20m，体積はおよそ 2000m^3 にもなる。この気球（体積は 2000m^3 とする）にはたらく浮力の大きさは何 N か。ただし，重力加速度の大きさを 9.8m/s^2，気球の外の空気の密度を 1.3kg/m^3 とする（以下，数値計算に必要ならこれらの値を使いなさい）。

気球（内部の気体を含む）の重さが，**問２**で求めた浮力の大きさよりも軽ければ，気球は空気中に浮くことができる。浮力の大きさは，気球内の気体の密度によらないことが興味深い。

では，飛行機もこの浮力で空中に浮くことができるだろうか。

問３　ジャンボジェット機の愛称で知られたボーイング 747 は全長 71m，質量 350 トン（1 トン＝1000kg）と巨大なものである。この機体にはたらく浮力の大きさを計算せよ。ただし，胴体部分は長さ 71 m ，直径 7.0m の円柱形とし，翼部分などにはたらく浮力は無視する。



（円周率は 3. 14 として計算すること）

問３より，浮力だけではジャンボジェット機は浮くことができないことがわかる。したがって，ジャンボジェット機が空を飛ぶためには，浮力以外の力が必要である。この力について考えてみよう。

図１－２のように，断面積 S_1，S_2 の円筒状の管がつながっており，その中を，速さ v_1，v_2 で流体が流れている。流体の密度は一定とする。

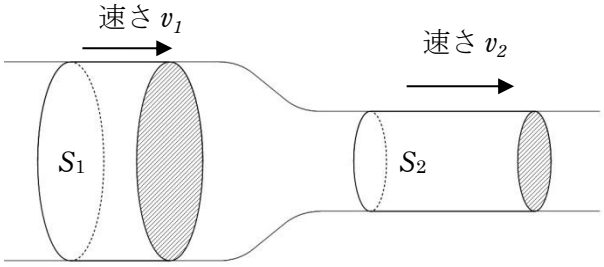


図１－２

問４　S_1，S_2，v_1，v_2 の間に成立する関係式を答えよ。

流体に粘性がなく，流体の流れが乱れのない一様な定常流だとして，流体の速さと圧力の関係を調べてみよう。一般的には，流体の流れが同じ高さで起こるとは限らない。そこで，**図１－３**のように，断面積 S_1，S_2 の管内での流体の圧力をそれぞれ p_1，p_2，基準面からの高さをそれぞれ h_1，h_2 とする。

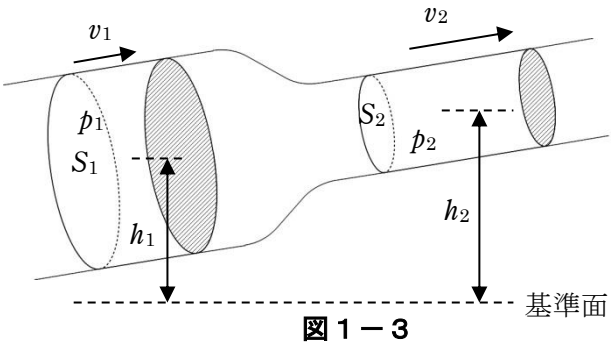


図１－３

問５　圧力が単位時間あたりにする仕事 $p_1S_1v_1-p_2S_2v_2$ は，流体の運動エネルギーの変化と重力による位置エネルギーの変化の和になる。流体の密度 ρ，重力加速度を g として，単位時間あたり圧力がする仕事 $p_1S_1v_1-p_2S_2v_2$ を，ρ，g，h_1，h_2，v_1，v_2，S_1，S_2 を用いて表せ。ただし，管の半径は，高さの差に対して十分に小さいものとする。

問６　**問４**と**問５**の結果から，一つの流れの任意の点の圧力を p，流体の速さを v，高さを h とするとき，

$$p+\frac{1}{2}\rho v^2+\rho gh=\text{一定}$$

という関係（これを**ベルヌーイの定理**という）があることを導け。

問７　次の文章中の（　　）内に，「高」「低」のどちらかの語句を入れなさい。

ベルヌーイの定理より，流体の速さが速いところと遅いところで圧力が異なる。つまり，流体が同じ高さを流れるとき，流体の圧力は，速いところでは（　１　）く，遅いところでは（　２　）くなる。

飛行機の翼の断面は，**図１－４**のように翼の上面が膨らんでいる。そのため，上面に沿って流れる空気と下面に沿って流れる空気の速さが異なり，ベルヌーイの定理によりその上面と下面で圧力差が生じて上向きの力が生じる。この力を**揚力**という。

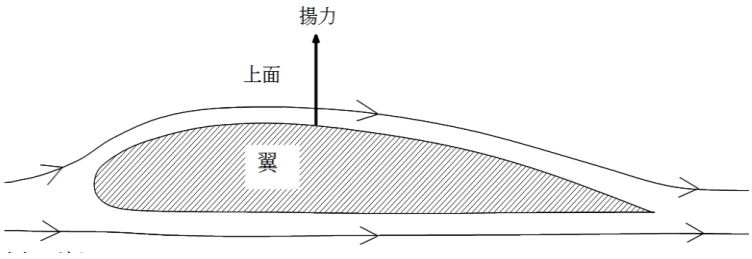


図１－４

問８　ジャンボジェット機の主翼の面積は 511m² もあり，テニスコート２面分にも達する。ジャンボジェット機が飛行しているとき，この広い主翼の上面と下面の圧力差により揚力が発生している。質量 350 トンのジャンボジェット機が水平飛行をしているとき，この圧力差は何 Pa になるか求めなさい。

問９　ジャンボジェット機は約 10000ｍの高さを飛び，その時の巡航速度はおよそ 900km/h である。いま，翼の下面での空気の速さは，この飛行機の速さに等しいと仮定すると，翼の上面と下面の速さの差は何 m/s か。**問８**の結果を用いて計算せよ。ただし，ジャンボジェット機の速さは 900km/h，高度 10000ｍでの空気の密度は 0.41kg/m³ とする。ただし，主翼の厚さは十分薄く，上面と下面の高さは等しいとして、ベルヌーイの式の第三項（ρgh）は無視して考えよ。

地上付近の圧力は１気圧（$=1.0\times10^5$Pa），旅客機が飛行する高度 10000ｍ上空の気圧は約４分の１気圧である。**問８**で求めた圧力差は，これらと比較して大変小さな圧力差であることがわかる。この小さな圧力差で飛ぶことができるのは，ジャンボジェット機の翼の広さが大きく影響していることは言うまでもないが，350 トンもある金属の塊が空を飛ぶことは，やはり，信じがたい。そこで，次のようなモデルで，ジャンボジェット機の大きさと重さの関係を考えてみよう。

問 10　ジャンボジェット機の空虚重量（何も乗せない状態の重量）は約 180 トンであるが，その機体の大部分は軽くて強いアルミ合金でできている。いま，ジャンボジェット機の全長を 71m，質量を 180 トン，そのすべてが密度 2.8g/cm³ のアルミ合金でできているとする。いま仮に，この機体を 7.1cm に縮小したとすると，その質量は何 g になるか。ただし，その材質は変わらない（密度は 2.8g/cm³ のまま）ものとする。

１円玉の質量は１g であるから，**問 10** の計算結果より，重そうに見えるジャンボジェット機も，実は大変軽いことがわかる。

このジャンボジェット機は，ジェットエンジン４基が後方にガスを噴射して前方に向かう力と揚力を得て，飛んでいる。では，翼を使わないでジェットエンジンを下方に向け，浮くことはできないだろうか。

問 11　一般に大型のジェットエンジン１基はおよそ 200 kN から 300kN の推力（$1\text{kN}=1\times10^3\text{N}$）を発生させることができると言われている。仮に，質量 350 トンのジャンボジェット機に，推力 300kN のジェットエンジンを下方に向けて取り付け，空中を飛ぶためには，最低何基のエンジンを取り付ける必要があるか。整数値で答えなさい。ただし，取り付けたエンジン自身による重さの増加は考えないものとする。

問 10 では，ジャンボジェット機はその大きさに比べて機体は大変軽いことを示したが，**問 11** の計算から，空を飛ぶためには流体力学を応用した翼が必要だということがわかる。

第２問

図２－１

水の入ったガラスコップにストローを入れると水面で折れ曲がって見える（**図２－１**）。これは水面で光が屈折したためである。このような光の屈折について考えてみよう。

図２－２は，光が空気中から水面に入射したときの進む様子を表したものである。空気中から水中に入る光を入射光，水面で曲がって水の中を進む光を屈折光という。また，水面に垂直な線を法線といい，入射光が法線となす角度を入射角，屈折光と法線のなす角度を屈折角という。

水の場合，入射角をθ_1，屈折角をθ_2とすると，

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\text{定数}$$

の関係があり，この関係を**屈折の法則**といい，この定数を**屈折率**という。また，光が空気中から水中に屈折して進むとき，この定数は 1.33 に等しい。

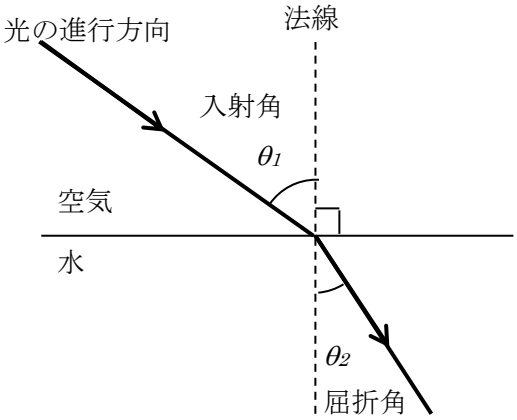


図２－２

ここで使った sin は三角関数とよばれ，**図２－３**の直角三角形 ABC の場合，

$$\sin\theta=\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}$$

という関係がある。

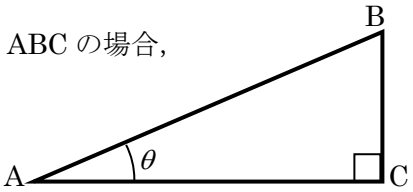


図２－３

この値は，三角形の大きさによらず角θだけにより決まる量で，次ページの**表１**のようになる。例えば，sin10°≒0.1736 である。以下の問いでは必要に応じて**表１**の値を用いよ。

問１　**図２－４**のように入射角 45° のとき，屈折角はいくらか。

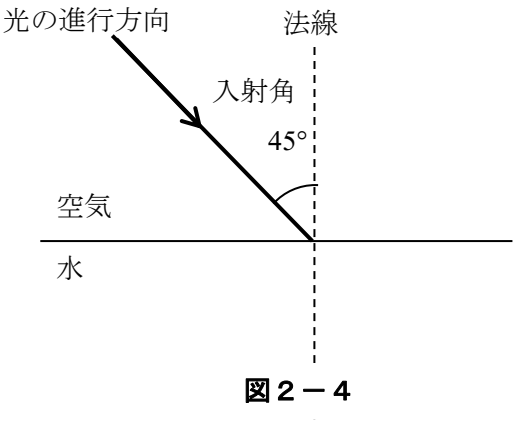


図２－４

表１

θ[°]	sinθ	θ[°]	sinθ	θ[°]	sinθ	θ[°]	sinθ	θ[°]	sinθ	θ[°]	sinθ
1	0.0175	16	0.2756	31	0.5150	46	0.7193	61	0.8746	76	0.9703
2	0.0349	17	0.2924	32	0.5299	47	0.7314	62	0.8829	77	0.9744
3	0.0523	18	0.3090	33	0.5446	48	0.7431	63	0.8910	78	0.9781
4	0.0698	19	0.3256	34	0.5592	49	0.7547	64	0.8988	79	0.9816
5	0.0872	20	0.3420	35	0.5736	50	0.7660	65	0.9063	80	0.9848
6	0.1045	21	0.3584	36	0.5878	51	0.7771	66	0.9135	81	0.9877
7	0.1219	22	0.3746	37	0.6018	52	0.7880	67	0.9205	82	0.9903
8	0.1392	23	0.3907	38	0.6157	53	0.7986	68	0.9272	83	0.9925
9	0.1564	24	0.4067	39	0.6293	54	0.8090	69	0.9336	84	0.9945
10	0.1736	25	0.4226	40	0.6428	55	0.8192	70	0.9397	85	0.9962
11	0.1908	26	0.4384	41	0.6561	56	0.8290	71	0.9455	86	0.9976
12	0.2079	27	0.4540	42	0.6691	57	0.8387	72	0.9511	87	0.9986
13	0.2250	28	0.4695	43	0.6820	58	0.8480	73	0.9563	88	0.9994
14	0.2419	29	0.4848	44	0.6947	59	0.8572	74	0.9613	89	0.9998
15	0.2588	30	0.5000	45	0.7071	60	0.8660	75	0.9659	90	1.0000

次に，水中から水面に向かって進む光について考えよう。

光は逆向きに進んでも同じ道筋を進む。これを光の逆進性という。そのため，水中から水面に向かう光は，入射角θが小さいとき，**図２－５**の光①のように，水面に近付くように屈折し，空気中に出ていく。しかし，入射角をだんだんと大きくしていくと．**図２－５**の光②のように水面に沿って空気中に出ていくようになる入射角θ_cがある。この入射角θ_cを**臨界角**という。入射角を臨界角θ_cよりさらに大きくしていくと，屈折光は空気中には出られなくなり，**図２－５**の光③のように水面で全て反射する。この現象を**全反射**という。

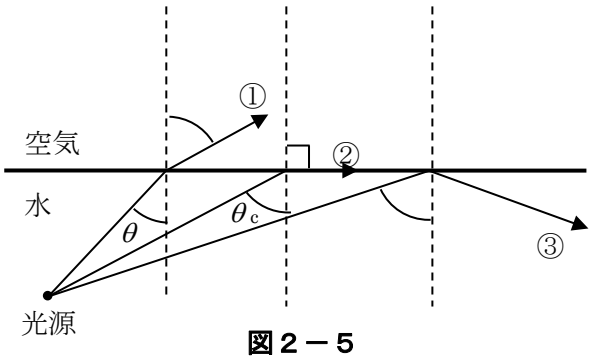


図２－５

問２　水の臨界角θ_cはいくらか。

上記のことと関連して，水中にいる魚の立場で空気中から水中に入ってくる光について考えてみよう。光の逆進性より，空気中から水中に屈折して入ってくる光の屈折角は，臨界角より小さくなるので，水中の魚は，**図２－６**のように，上方の一部の光を見るだけで，水面上にある物体をすべて見ることができる。したがって，人が静かに近づいたとしても，魚にはお見通しなのである。

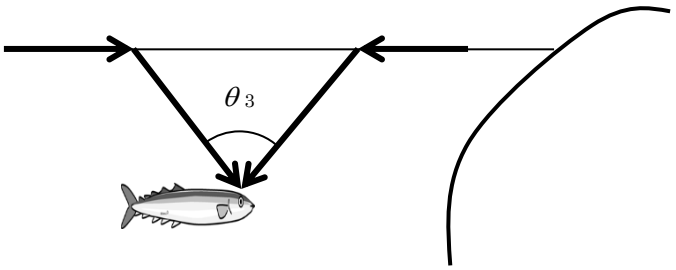


図２－６

問３　水中にいる魚が空気中にあるすべてのものを見ることができるためには，魚の上方の何度の範囲を見ればよいか。**図２－６**の角度θ_3に相当する角度を答えよ。

光の屈折はいろいろな場面で見ることができるが，**図２－７**のように，窓際のガラスコップに入った水による光の屈折を考えてみるのもおもしろい。

図２－８のように，円筒形の透明なガラスコップに水をいっぱいに入れて日の当たる窓際の台に置く。この断面を見ると，**図２－９**のように水面がコップの側面に対して垂直になっている。このコップに太陽の光が入射し，水中に入り屈折する。そして，そのまま進み側面から外に出て，台を照らす。

このように，水面とコップの側面で屈折した光が，台の上を照らすのは，朝方または夕方の太陽高度が低いときである。太陽の高度が高いと，コップの側面で全反射が起き，光が側面から外に出ないからである。

図２－７

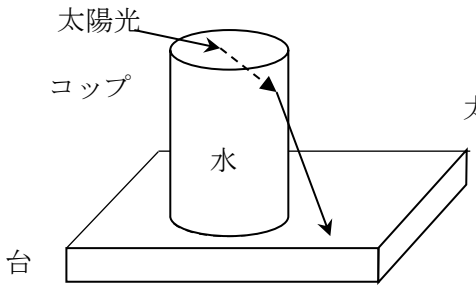


図２－８

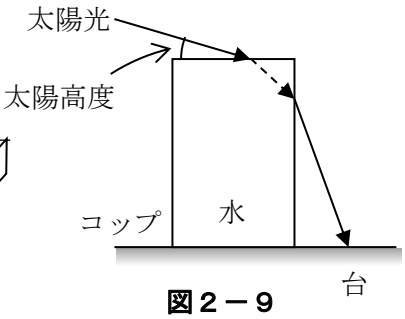


図２－９

問４　**図２－９**のように，コップの中を通過した太陽の光が台に達するためには，太陽の高度が何度以下でなくてはならないか。その太陽の高度θ_0を求めよ。ただし，コップの厚さは十分に薄く，コップの側面では，水と空気が直接接していると考えてよいものとする。

問５　**図２－10** のように，コップの口が底面より広くて透明なガラスコップに水を入れたとき，太陽の光が台に達する太陽の高度θの最大値θ_4は，**問４**で求めた値より大きいか，小さいか，あるいは同じか。そう判断した理由とともに答えなさい。コップの厚さは十分に薄いものとする。

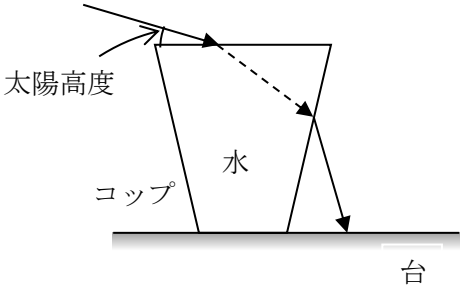


図２－10

実際は，水の屈折率は光の色によって異なるため，コップの側面から空気中に出る光の屈折角は光の色によって異なる。そのため，コップを出た光は，**図２－７**のように，朝方と夕方だけ窓際に虹をつくるのである。

第３問

中学校の理科や高等学校の物理の授業で，物体の運動を扱うとき，物体の大きさは無視できるほど小さいとして扱うことが多い。例えば，**図３－１**のように，「点 Q より h だけ高いなめらかな斜面上の点 P から，質量 m の小さい物体を静かに滑らせるとき，点 Q での速さを求めなさい。」というような問い方になる。答えは，重力加速度の大きさを g とすると，力学的エネルギー保存の法則より，

$mgh = \frac{1}{2}mv^2$ が成り立つので，点 Q での速さ v は，$v = \sqrt{2gh}$

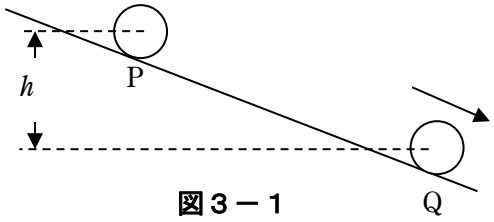


図３－１

となる。このように，質量と位置はあるが，物体の大きさを無視できる物体を「質点」といい，物体を質点として扱うことが多い。

しかし，実際の物体には大きさがある。大きさを考えると，**図３－２**のように，「点 Q より h だけ高い斜面上の点 P から，半径 r，質量 m の球を転がすとき，点 Q での速さを求めなさい」といった問題も成立する。つまり滑らさないで転がすのである。

転がすというのは，一回転したとき，進んだ距離が球の円周に等しいということである。

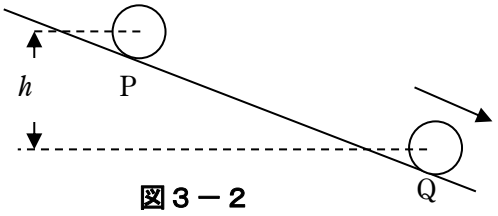


図３－２

ここでは，大きさを無視しないで物体の運動を考えてみよう。

まず，その準備として，角度の表し方から話を進める。角度を表すのに，これまでは 180°や 360°のように，〔° 〕という単位を使ってきたと思うが，別の表し方を定義しよう。

半径 r の円弧を考える。ある中心角に対する弧の長さは円の半径に比例するが，中心角にも比例する。つまり，この弧の長さは中心角を表していると考えることができる。そこで，**図３－３**のように，半径 r の円弧の長さを x とするとき，中心角 θ を，

$$\theta = \frac{x}{r}$$

と定義する。この表し方を弧度法といい，単位を rad（ラジアン）で表す。したがって，半径 r の円の円周の長さは $2\pi r$ であるから，360°を弧度法で表すとその値 θ〔rad〕は，

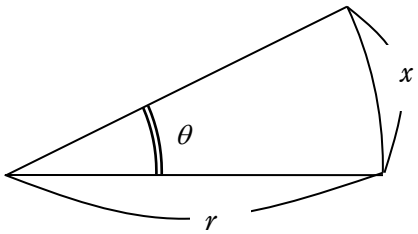


図３－３

$$\theta = \frac{x}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{〔rad〕}$$

となる。180°を弧度法で表すと，その値 θ'〔rad〕は θ の半分であるから，

$\theta' = \pi$〔rad〕

となる。以下では，角度を弧度法で表すことにする。

問１　45°は何 rad か。（ただし，円周率は π とする）

図３－４のように，質量の無視できる長さ r の棒の先端につけた質量 M の小さなおもりを，点 O の周りに一定の速さ v で回転させる場合を考えてみよう。

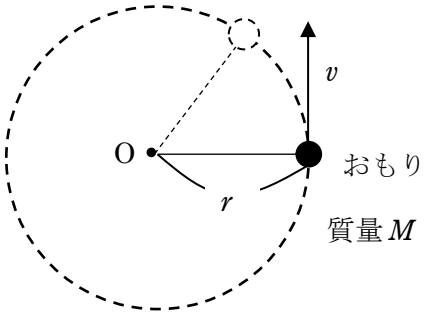


図３－４

問２　単位時間（たとえば１秒間）におもりが進む距離はいくらか。

よって，単位時間に回転する角度は $\frac{v}{r}$ となり，これを**角速度**とよび，ω（オメガ）で表す。つまり $\omega = \frac{v}{r}$ である。

問３　このおもりのもつ運動エネルギー K は $K = \frac{1}{2}Mv^2$ と表せるが，これを $K = \frac{1}{2}I\omega^2$ と表すとき，I を M，r で表しなさい。

一般に，ある軸のまわりを回転する物体のもつ運動エネルギー K は $K = \frac{1}{2}I\omega^2$ と表され，I を**慣性モーメント**と呼ぶ。慣性モーメントは「物体の回転運動の変化のしにくさ」を表す物理量である。

問４　**図３－５**のように，長さ $2r$ の質量の無視できる細い棒の両端に質量 M の小さなおもりをつけ，棒の中点 O を中心に角速度 ω で２つのおもりを回転させる。全体の慣性モーメントを求めなさい。

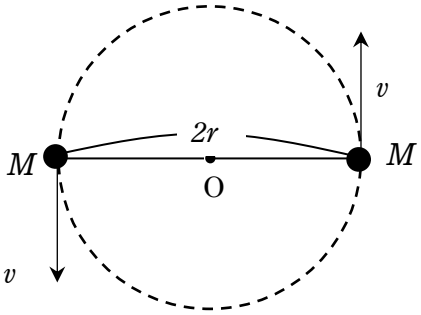


図３－５

問５　図３－６のように，点 O を中心とする半径 r の円周上に質量 M の小さなおもりを，等間隔に N 個並べたとすると，点 O のまわりの全体の慣性モーメントを求めなさい。ただし，慣性モーメントは，実際に回さなくても，仮に点 O のまわりに回したとして考えて求めればよい。

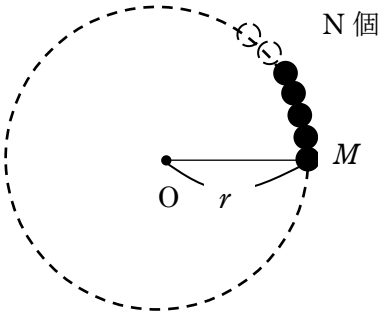


図３－６

問６　図３－７のように，幅が十分狭い質量 M，半径 r の一様なリングを考える。これを，中心 O からのなす角度が等間隔になるようにリングを N 等分する。

（１）このとき，N 等分したうちの１個の部分の慣性モーメント I_1 を求めなさい。

（２）また，このリングの点 O のまわりの慣性モーメント I を求めなさい。

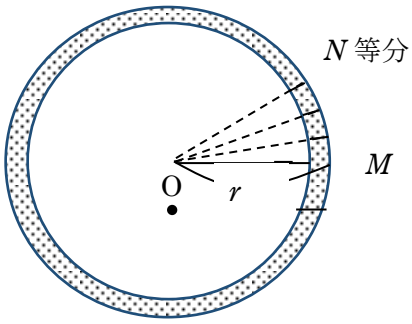


図３－７

次に，**図３－８**のように，厚さと密度が一様な円板（以下同様）の慣性モーメントを求めてみよう。

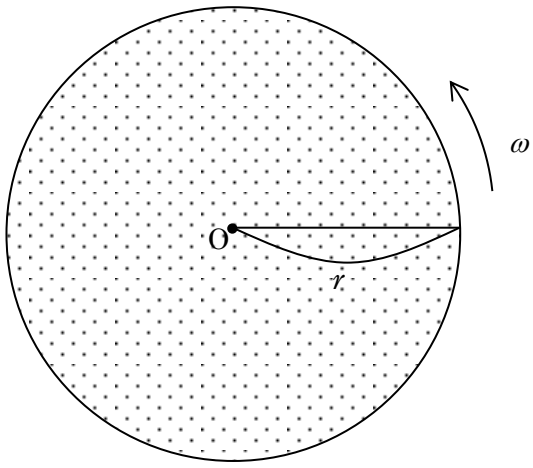


図３－８

半径 r，質量 M の厚さと密度が一様な円板が中心軸 O の周りを角速度ωで回転しているとする。この円板は，**図３－９**のように等しい幅の N 個のリングが集まってできていると考えるとよい。

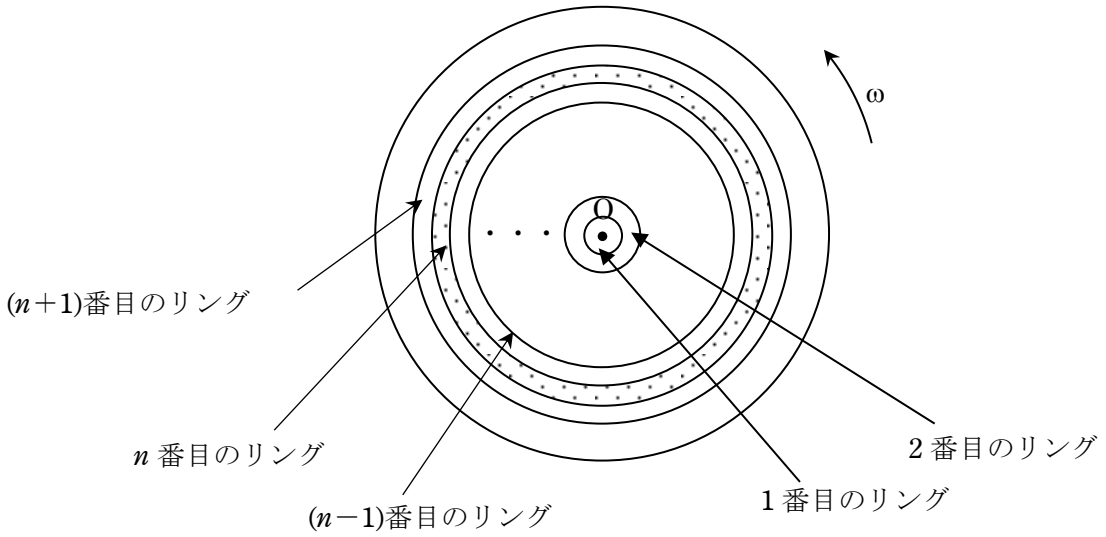


図３－９

問７　中心軸 O から n 番目にある幅 $\frac{r}{N}$ のリングの質量はいくらか。

問８　中心軸 O から n 番目のリングについて考える。このリング上の点の速さは中心に近い側と遠い側で速さは異なるが，ここでは，リングのどの部分もリングの中心に近い側の速さで回転運動していると考えよう。このとき，角速度ωで回転している中心軸 O から n 番目のリングの持つ回転による運動エネルギーを求めなさい。

円板の回転による運動エネルギーは，N 個のリングすべての運動エネルギーを足し合わせればよい。また，より正確に運動エネルギーを求めるためには N を限りなく大きくするとよい。（1 番目の円板も，**問８**で求めた式で求められると考えてよい。）

問９　（１）回転による運動エネルギーを M，r および角速度ωを用いて表しなさい。

以下の関係式を用いてもよい。また，N が 1 より十分大きいとき，$\frac{1}{N}$ は 0 としてよい。

$$1+2+3+\cdots+N=\frac{N(N+1)}{2}$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+N^2=\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+N^3=\frac{N^2(N+1)^2}{4}$$

（２）また，この円板の慣性モーメントを求めなさい。

次に，**図３－10** のように，円板が滑らずに回転しながら下る場合を考える。このとき，重力による位置エネルギーは，重心の運動エネルギーと重心を中心とした回転運動による運動エネルギーに変わる。

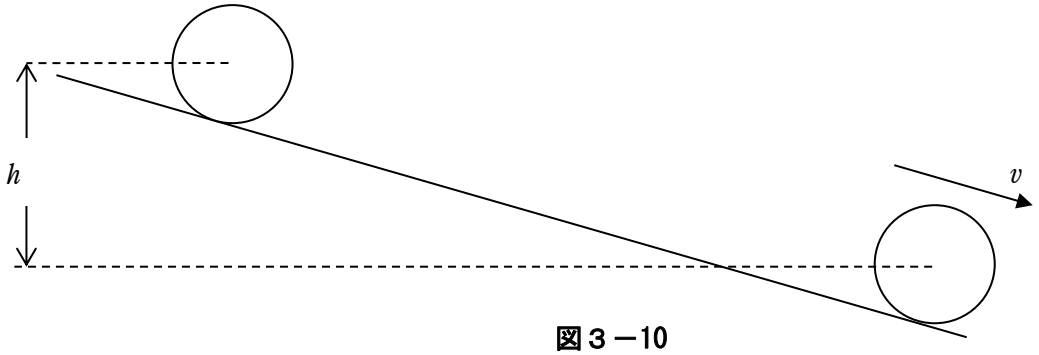


図３－10

問 10　質量 M，半径 r の円板が初速度 0 で転がりはじめ，高さ h だけ下ったときの円板の重心の速さを v とする。v を M，r，h，g の中から必要なものを使って表しなさい。

問 11　**図３－11** は大きさと質量の等しい２つの円筒の断面図である。**円筒Ａ**は質量が周囲に集中しており，**円筒Ｂ**は質量が中心に集中している。この２つの円筒を静止の状態から同時に斜面を滑らずに回転しながら下らせると，どちらがはやく下端に達するか。これまでの考察をもとに理由とともに説明しなさい。ただし，質量のある部分（図の網掛け部分）の密度も一様であるとする。

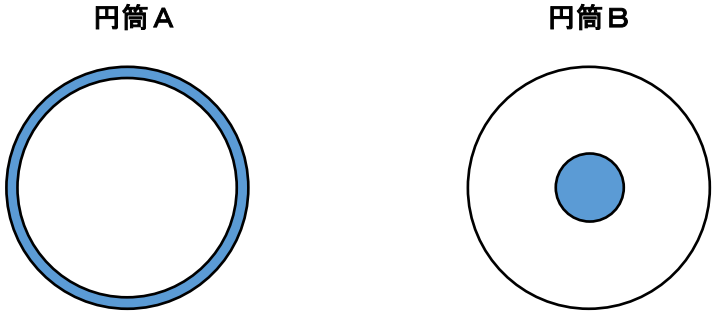


図３－11

＜以下余白＞

岡山県マスコット　ももっち