科学オリンピックへの道

岡山物理コンテスト2017

問題Ｂ

2017年10月14日（土）
11:25～12:35（70分）

問題にチャレンジする前に次の**＜注意事項＞**と**＜指数を用いた数の表記＞**をよく読んでください。
問題は大問３題からなります。問題は一見難しく見えても，よく読むとわかるようになっています。
どの問題から取り組んでも結構です。最後まであきらめずにチャレンジしてください。

＜注意事項＞

１．開始の合図があるまで，問題冊子（全15ページ）を開けてはいけません。
２．電卓を使用してもよろしい。
３．携帯電話やスマートフォンなどの電源は切り，カバンの中にしまっておきなさい。
４．解答はすべて解答用紙に記入しなさい。解答用紙は３枚です。必ずチャレンジ番号と氏名を記入しなさい。
５．気分が悪くなったりトイレに行きたくなったりしたとき，または質問があるときは手を挙げて監督者に知らせなさい。
６．終了の合図があったら，ただちに解答を止め，チャレンジ番号と氏名を確認の上，監督者の指示を待ちなさい。
７．問題冊子は持ち帰りなさい。

＜指数を用いた数の表記＞

大きい数や小さい数を扱うときには，指数表記を利用することが多い。

$$1.2\times10^{3}=1.2\times10\times10\times10=1200 \qquad 1.2\times10^{-3}=1.2\times\frac{1}{10^{3}}=\frac{1.2}{1000}=0.0012$$

指数表記では，一般に $a\times10^{n}$ （$1\leqq a<10$）の形で表す。
このように記述することで，大きな数や小さな数を簡潔に表現できる。

【例】　地球から太陽までの距離 ＝150000000 km ＝ 1.5×10^{8} km
　　　　電子の質量 ＝0.00000000000000000000000000000091 kg ＝ 9.1×10^{-31} kg

＜参考＞（物理のための数学基礎知識）

【三角比】

直角三角形の直角でない角度の１つが決まれば，３辺の比を決めることができる。これを三角比という。図１のように辺の長さ a，b，c と角度 θ を決めると，正弦（sin : サイン），余弦（cos : コサイン），正接（tan : タンジェント）は以下のように定義される。

正弦　$\sin\theta = \dfrac{a}{c}$　　余弦　$\cos\theta = \dfrac{b}{c}$　　正接　$\tan\theta = \dfrac{a}{b}$

これらにより，直角三角形の１つの辺の長さと１つの角度の大きさが決まれば，残りの辺の長さを三角比を用いて表すことができる。

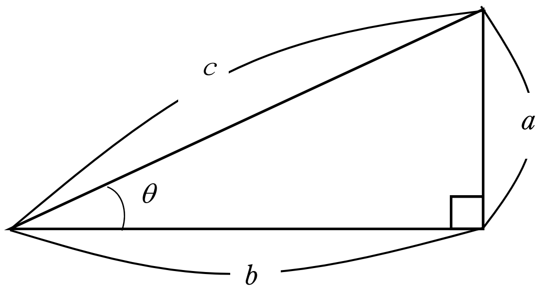


図１

【弧度法】

角度を表すのに，180°や 360°のように，〔°〕という単位を使って表す度数法は日常生活で広く使われている。一方数学や物理では，弧度法と呼ばれる表し方を用いる場合が多い。この表し方は次のように定義される。

半径 r の円弧を考える。ある中心角に対する弧の長さは円の半径に比例するが，中心角にも比例する。つまり，この弧の長さは中心角を表していると考えることができる。そこで，図２ように，半径 r の円弧の長さを x とするとき，中心角 θ を，

$$\theta = \frac{x}{r}$$

と定義する。この表し方を弧度法といい，単位を rad（ラジアン）で表す。

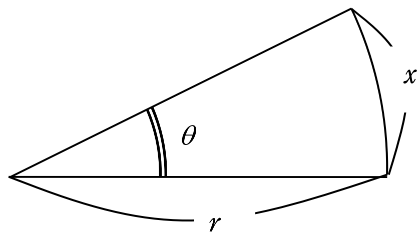


図２

したがって, 半径 r の円の円周の長さは $2\pi r$ であるから，360°を弧度法で表すと，その値 θ〔rad〕は,

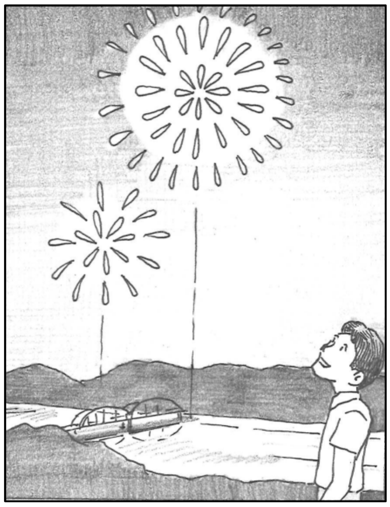
$$\theta = \frac{x}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{〔rad〕}$$

となる。180°を弧度法で表すと，その値 θ'〔rad〕は θ の半分であるから,

$$\theta' = \pi \text{〔rad〕}$$

となる。

第１問



夏祭りなどで夜空を彩る打ち上げ花火には，5 号玉(直径約 15 cm)や 1 尺玉（直径約 30 cm）のように様々な大きさの「玉」があり，広がり方に違いがある。火の粉が地上に届かないようにするため，打ち上げるおおよその高さが，「玉」の大きさによって決まっている。例えば，1 尺玉は上空 330 m まで打ち上げられ，最高点に達したとき花火が開くように調整されている。

「玉」の断面は**図１−１**のようになっている。花火の中心にある「割薬」が，そのまわりにある光りながら色を出すための「星」を押し出す。「星」は押し出されると同時に点火され，鮮やかな色に発光しながら運動する。

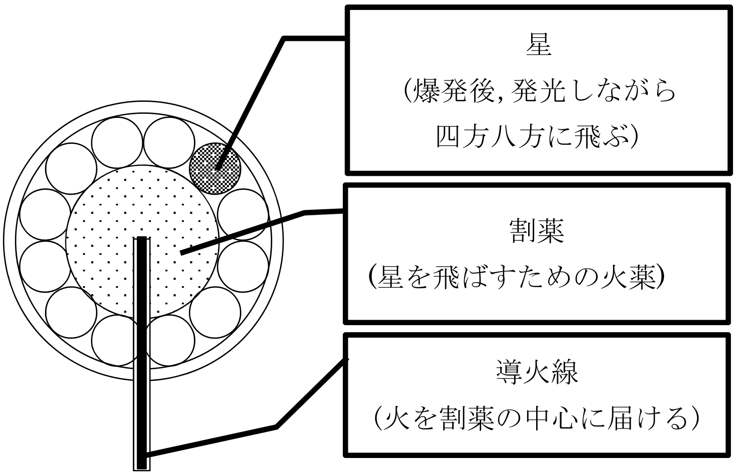


図１−１

打ち上げ位置から遠く離れた地点で花火を見ている人には，花火が開いてから 2.0 秒遅れて花火が開いた音が聞こえた。ただし，上空 330 m で「割薬」に点火されたものとする。

問１　花火が開いた点から，観客の位置までの直線距離は何 m か答えよ。ただし，音速は 340 m/s とする。

問２　打ち上げ位置と観客の間の，水平距離は何 m か答えよ。小数点第 1 位を四捨五入して，整数で答えよ。

問３　「玉」を高さ 330 m まで打ち上げるためには，地表から何 m/s の速さで打ち上げればよいか答えよ。重力加速度の大きさを 9.8 m/s^2 とする。
※実際は空気抵抗などでこれよりも速く打ち上げる必要がある。

本来，花火の広がりは三次元であるが，観客からは二次元的に，円形に広がったように見える。そこで**図１−２**のように，「星」が x−y 平面上に広がったと考える。ここで，「星」の１つに着目し，その「星」の広がる直前の位置を原点とし，水平方向を x 軸，鉛直方向を y 軸とする。水平右向き，鉛直上向きをそれぞれ正とする。

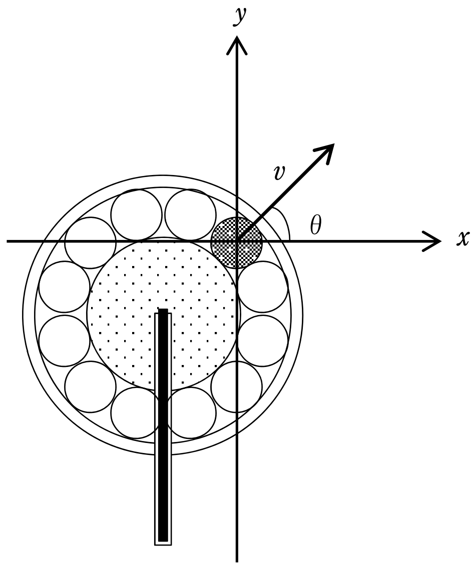


図１−２

花火が開いた時に，x 軸となす角 θ，速さ v で押し出された「星」の，花火が開いた瞬間から t 秒後における x 座標を x，y 座標を y とする。重力加速度の大きさを g とすると，

$$x = v\cos\theta \cdot t \qquad \cdots (1)$$

$$y = v\sin\theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad \cdots (2)$$

と表される。

また，広がった花火全体の重心の座標は，最高点で花火が開き重力の影響により運動するため，花火が開いた瞬間から t 秒後における x 座標 x_G，y 座標 y_G は，花火の大きさを無視すると，

$$x_G = 0 \qquad \cdots (3)$$

$$y_G = -\frac{1}{2}gt^2 \qquad \cdots (4)$$

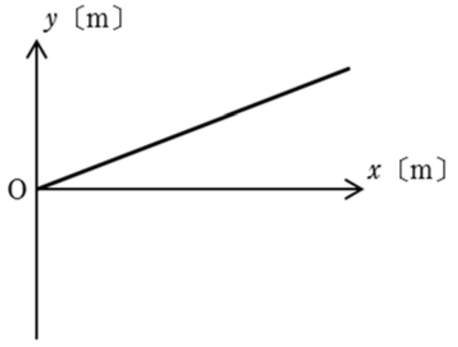
と表される。

問４　花火が開く際に，$\theta = 0$ で水平に速さ v〔m/s〕で押し出された「星」の軌跡はどのように見えるか。（ア）と（イ）の場合について，次の①～⑤からそれぞれ１つずつ選べ。

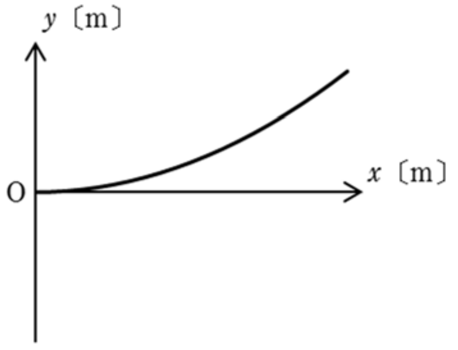
（ア）　地上に静止している観客から見た場合

（イ）　花火全体の重心から観測した場合

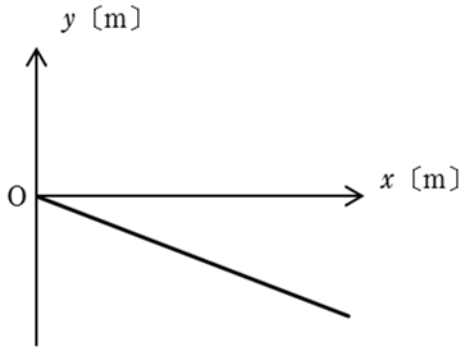
①



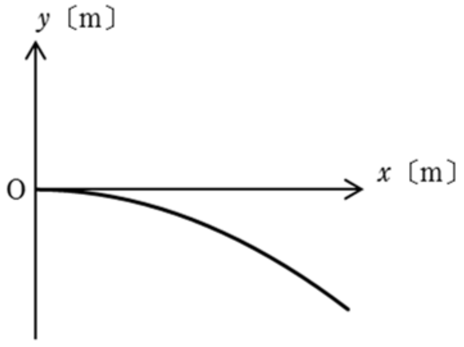
②



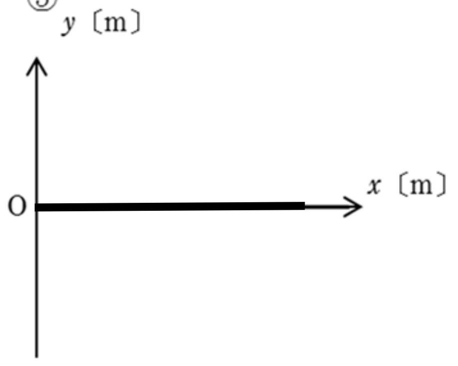
③



④



⑤



問５　花火全体の重心とともに移動する座標から見ると，「星」は円形に広がっている。このことを式(1)〜(4)を用いて説明せよ。必要であれば$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$を用いてもよい。

一般に，$x^2+y^2=a^2$ で表されるとき，(x，y）は半径 a の円を描く。

これまでは，「星」が重力のみの影響を受ける場合を考えたが，実際は「星」にパラシュートをつけるなどして，空気抵抗を利用して広がり方を調整している。

花火が開いた点で水平に 160 m/s で押し出された「星」の，時間に対する速度の x 成分は下の図１－３のようになったとする。

問６　花火が開いてから６秒後の「星」の水平方向の変位はいくらか。$v-t$ グラフの面積が変位になることを利用して求めよ。ただし，面積の数え方は，以下の（例）を参考にすること。

（例）次のように，グラフが少しでもかかっていた場合は，すべて面積を半分と見なす。

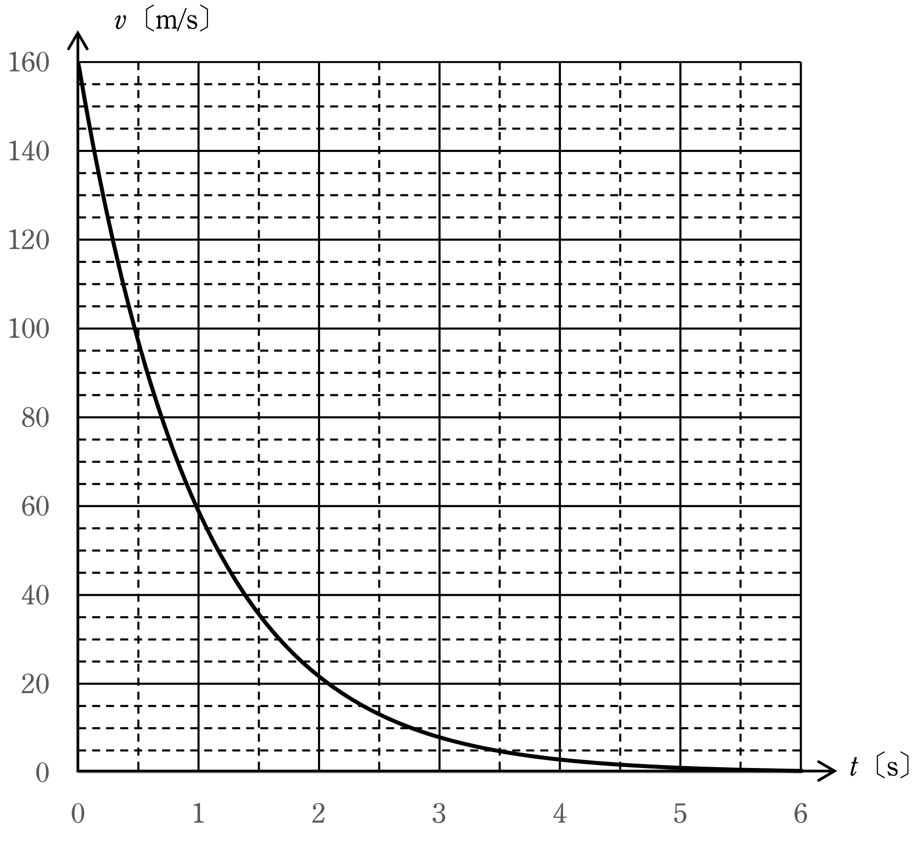


図１－３

第２問

ある日，家の庭に出ると写真（図２−１）のような物体が落ちているのを見つけた。「気象庁　気象観測器」と書いてある。不思議に思い，調べてみると「ラジオゾンデ（図２−２）」という高層の気象データを測定する観測器であることがわかった。どうやらゴム気球で風に乗って，我が家にやってきたらしい。興味をもったので，さらに調べてみた。

図２−１　写真

ラジオゾンデは気圧，気温，湿度などの気象に関する値を測定するセンサーを搭載し，測定した情報を送信するための無線送信機を備えている。ゴム気球を観測器に取り付け，気象台や測候所，南極基地などで毎日決まった時間（日本標準時の９時と 21 時）に放出する。観測器はゴム気球の浮力で約 360 m/分で上昇しながら測定を行う。高度が高くなると気圧が小さくなるため，ゴム気球は上昇するにつれて膨張し，高度約 30 km で大きさの限界に達して，破裂して約 90 分間の測定が終了する。観測器はパラシュートでゆっくりと落下するので，地上に激突することはなく着地し回収することも可能である。

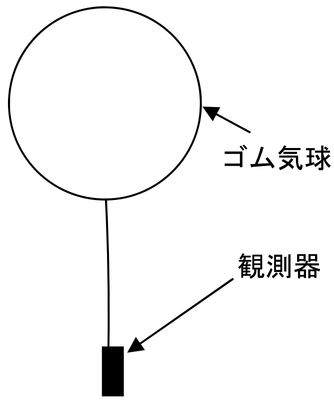


図２−２　ラジオゾンデ

観測器で測定する気圧について考えてみよう。気圧とは空気の圧力である。圧力は 1 m^2 の面積にどれだけの力が加わっているかを表す量であり，圧力 p〔Pa〕は，加わる力を F〔N〕，力が加わる面積を S〔m^2〕とすると以下のように表される。

$$p = \frac{F}{S}$$

密度 ρ〔kg/m^3〕，断面積 S〔m^2〕，高さ h〔m〕の円柱があるとき，底面の圧力を計算してみよう（図２−３）。密度 ρ は体積 1 m^3 あたりの物体の質量〔kg〕である。円柱の体積は Sh〔m^3〕であるから，質量は ρSh〔kg〕，重力加速度の大きさを g〔m/s^2〕とすると，はたらく力（重力）は ρShg〔N〕となる。

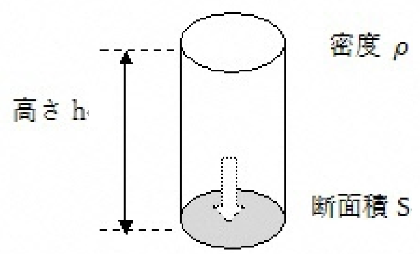


図２−３

したがって，底面の圧力 p〔Pa〕は

$$p=\frac{（底面に加わる重力）}{（底面積）}=\frac{\rho Shg}{S}=\rho hg$$

となる。よって，円柱の底面の圧力は次の①式で表される。

円柱の底面の圧力： $p=\rho hg$ ・・・①

地上を覆う空気にも質量があり，地表から上空に存在している空気の重さが，気圧を生じさせる原因である。

地上での気圧の測定を行った科学者にイタリアの物理学者トリチェリがいる。水銀（密度 13.6×10^3 kg/m^3）を用いて測定を行うと，高さ 76 cm の水銀柱の底面の圧力と地上での気圧がつり合うことが分かった。その圧力の大きさを１気圧とよぶ。圧力の単位〔Pa〕（パスカル）で１気圧を表すと，①式を用いて

$$p=\rho hg=(13.6\times10^3\ \mathrm{kg/m^3})\times(0.76\ \mathrm{m})\times(9.8\ \mathrm{m/s^2})\quad=1.013\times10^5\ \mathrm{Pa}$$

となる。

問１　１気圧は，水銀柱では高さは 0.76 m となる。この実験を水（密度 1.0×10^3 kg/m^3）を用いて行ったとすると，水柱の高さは何 m か。小数第２位を四捨五入して，小数第１位まで答えよ。

問２　地上付近の空気の密度は，1.29 kg/m^3 である。上空まで空気の密度が変わらないと仮定したら，上空何 km まで空気があることになるか。小数点第１位を四捨五入して，整数で答えよ。

※ 実際は上空になるにしたがって空気の密度は小さくなるので，**問２**の答えよりもっと上空まで空気は存在する。

大気の圧力は気象条件によって変化するので，基準となる標準大気というものが仮想的に定められている。標準大気の値は気象条件によって左右されないので，航空機はこれによって高度を把握して飛行している。その値の一部を下の**表２**に示した。出題の都合上，高度 30 km の温度は記載していない。

表２　標準大気

高度	圧力〔Pa〕	温度〔℃〕
地上	1.013×10^5	15.0
10 km	2.644×10^4	－50.0
30 km	1.17×10^3	

（理科年表より抜粋）

問３　調べてみると，地表から高度 11 km までは，温度は一定の割合で下がっていくことがわかった。温度は 1 km あたり何℃ずつ下がるか。小数第２位を四捨五入して，小数第１位まで答えよ。

問４　**表２**によると，高度 30 km で圧力 $p=1.17\times10^3$ Pa である。高度 30 km より上空の空気は，空気全体の何％にあたるか。小数第２位を四捨五入して，小数第１位まで答えよ。

一定量の気体の圧力 p，体積 V，温度 T（絶対温度）の間には

$$\left(\text{地上の}\frac{pV}{T}\text{の値}\right)=\left(\text{上空の}\frac{pV}{T}\text{の値}\right)$$

という関係が成立する。この関係をボイル・シャルルの法則という。

ここで絶対温度とは，絶対零（れい）度（これ以上低い値が存在しない温度，−273.15℃）を基準（ゼロ）とし，目盛の間隔はセルシウス温度（セ氏温度）と等しくなるように定めた温度で，単位にはケルビン（記号 K）を用いる。絶対温度 T〔K〕とセ氏温度 t〔℃〕の関係は次の式で表される。

$$T = t + 273.15$$

問５　ラジオゾンデのゴム気球は，一般に地上で直径 1.6 m である。それが上空 30 km では直径 7.0 m の大きさとなり，ゴムの張力の大きさがゼロとなって破裂することが知られている。**表２**の値とボイル・シャルルの法則を用いて，上空 30 km の温度（単位℃）を求めよ。ただし，ゴム膜の影響を無視し，小数第２位を四捨五入して，小数第１位まで答えよ。

問６　標準大気では上空 30 km の気温は－46.5℃である。**問５**の計算結果はこの値より大きくなっている。これはゴム膜が縮む影響を考慮しなかったためである。

右の**図２－４**のように，ゴム膜が縮もうとすることで圧力 Δp が生じるため，気球内の気体の圧力 p_{in} は外気の圧力 p_{out} よりは大きくなる。これらの圧力の間には次のつり合いの関係が成り立つ。

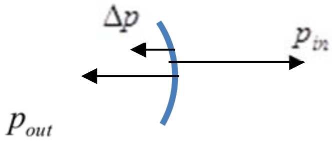


図２－４

$$p_{\mathrm{in}} = p_{\mathrm{out}} + \Delta p$$

ボイル・シャルルの法則を用いて，地上でのゴム膜が縮もうとする圧力 Δp〔Pa〕は，地上での圧力の何倍か求めよ。小数第３位を四捨五入して，小数第２位まで答えよ。

第３問

波の伝わる様子を観察するときには，ウェーブマシン（**図３－１**）という実験器具を使うと便利である。ウェーブマシンの左端を上下に振動させ続けると，**図３－２**のような波ができる。

波形の最も高いところを山，最も低いところを谷といい，１つの山から次の山までの距離，あるいは１つの谷から次の谷までの距離を波長 λ という。

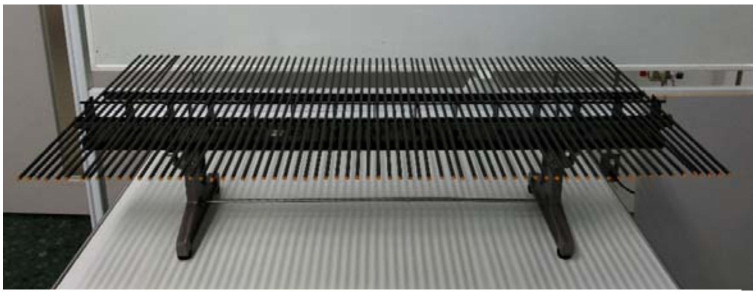


図３－１　ウェーブマシン

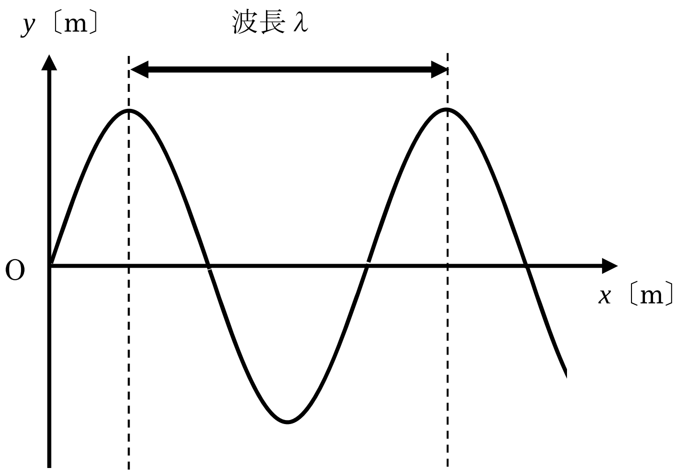


図３－２　波の伝わる様子

弦を張って中央をはじいて振動させると，張力と弦の長さに応じた振動数の音が出る。振動数とは，１秒間に繰り返す波の振動の回数である。この音を使って楽器ができ，音楽を奏でることができる。

弦の振動は基本振動という，**図３－３**のような振動が起きる。波長は弦の長さ L〔m〕の２倍である。**図３－３**の場合，波長は２L〔m〕である。波であるから $v = f\lambda$ の関係があり，f〔Hz〕は振動数，v〔m/s〕は弦を伝わる波の速さである。

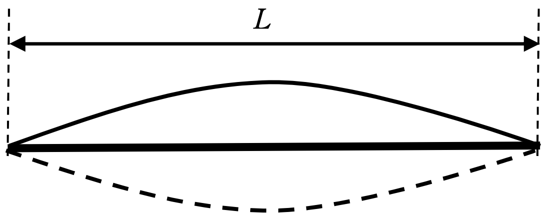


図３－３　弦の基本振動の模式図

弦の中央を固定して振動させると，波長が $\frac{1}{2}$ になった振動が起き，振動数は２倍になる。これを１オクターブの差という。

図３－４のように，弦の長さの $\frac{1}{3}$ の部分を固定する。弦の長い方を振動させると，波長がもとの弦の $\frac{2}{3}$ 倍の長さの弦による振動が生じるため，高い音が出る。音階で言うと，元の音が「ド」であれば，あとの音は「ソ」である。このことは，ピタゴラスが研究したと言われ，ピタゴラス音階とも言われる。

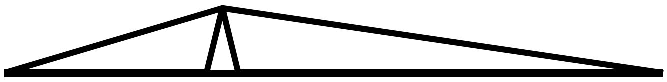


図３－４　弦の長さの$\frac{1}{3}$の部分を固定した図

問１　図３－４の弦の振動数の変化を考えたとき，ピタゴラス音階では，「ソ」の音の振動数は，「ド」の音の振動数の何倍か。小数第二位を四捨五入して，小数第一位まで答えよ。

西洋音楽で用いられる７音音階（ドレミファソラシド）は，全音と半音を含めると 12 段階になっている（図３－５）。ピタゴラス音階は，１段階ごとが均一ではないが，各段階の間の比を等しくした音階が存在し，これを十二平均律という。

1939 年 5 月ロンドンで開催された国際会議で「ラ」の音を 440Hz として，12 段階を均一に分けた音階を使用することが決まった。1 オクターブの間に鍵盤は 12 あるので，半音の変化が 12 回あり，変化の割合 d は $d^{12}=2$ を満たす値となる。つまり，$d=1.059463$ となり，半音上がる毎に振動数は 1.059463 倍大きくなる。

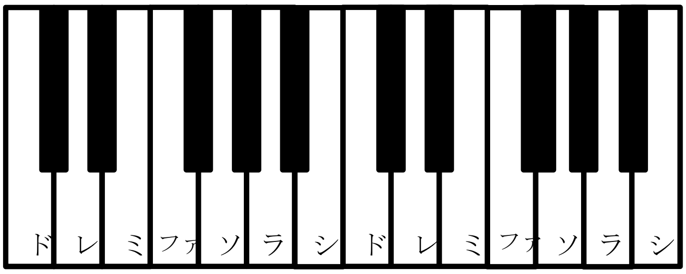


図３－５　ピアノの鍵盤

問２　表３の(A)には，十二平均律において，「ソ」の音の振動数の，基準の「ド」の音の振動数からの倍率が入る。その値を小数第五位を四捨五入して，小数第四位まで答えよ。

表３　基準の「ド」からの倍率

音階	ドからの倍率
ド	1.0000
レ	1.1225
ミ	1.2599
ファ	1.3348
ソ	(A)
ラ	1.6818
シ	1.8877
ド	2.0000

問１，問２で計算した値を比べてみると，わずかに差があることが計算結果から分かる。

オーケストラの演奏の前には，全体の音の調整をするため，オーボエ（**図３－６**）の「ラ」の音を使いチューニング（音合わせ）をはじめる。日本では，「ラ」の音の振動数を 442Hz に合わせることもある。

図３－６　オーボエ

問３　オーボエが 442Hz の音を出しているとき，音の波長 λ〔m〕はいくらか。ただし，波長 λ，振動数 f，音速 v の間には $v = f\lambda$ の関係があり， $v = 340$m/s とする。小数第三位を四捨五入して，小数第二位まで答えよ。

問４　自分が演奏している楽器で「ラ」の音を出すと，オーボエより高い音で，３Hz のうなりが聞こえた。自分の出している楽器の音の振動数はいくらか。ただし，楽器１の出している音の振動数を f_1，楽器２の出している音の振動数を f_2 とすると，うなりの振動数 f〔Hz〕は $f = |f_1 - f_2|$ の関係がある。

管楽器は，管の長さを変えることによって，音階をつくっている。この原理を理解するために，試験管を用いた実験①～③を行った。この長さでは標準の「ラ」の音 440Hz をつくるには長さが足りないので，１オクターブ上の音階をつくる。１オクターブ上の「ラ」の音は 880Hz である。ただし，開口端補正は考えないものとする（**図３−７**）。

実験

①数本の試験管（長さ 18cm）に水を入れる。

②試験管の口を吹いて音を出す。

③水位を調節して 880Hz の「ラ」の音をつくる。

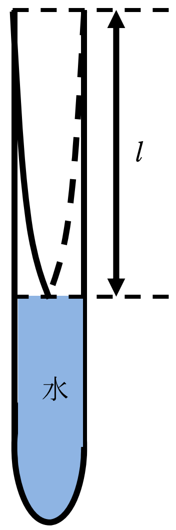


図３−７　気柱の基本振動の模式図

問５　この実験で共鳴する気柱（試験管の口から水面まで）は基本振動をするものとする。気柱の長さを l とすると，波長 λ は $\lambda=4l$ で表される。l を振動数 f，音速 v を用いて表せ。

問６　必要な気柱の長さは何 cm か。ただし，音速は v = 340m/s とする。小数第二位を四捨五入して，小数第一位まで答えよ。

空気中を伝わる音の速さはどのようにして決まっているのだろうか。音と呼んでいる感覚は主に，空気中の圧力変化が鼓膜の機械的振動を引き起こすことによって生じている。音の伝わる速さ v〔m/s〕は温度 t〔℃〕によって変化し，$v = 331.5+0.6\,t$ で表される。この関係は−45℃～1000℃の広い範囲にわたって成立することが知られている。

問７　気温 15℃のときの音の速さ v〔m/s〕を小数第一位を四捨五入して，整数で求めよ。

上の式は，気体が振動するときの縦波の伝わる速さとして計算すれば導くことができる。空気を理想気体とみなす。それが断熱変化しながら弾性波が伝わる速さが音の速さであると考える。弾性波の伝わる速さ v は，次の式で与えられる。

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} \quad \cdots ①$$

ここで，γ は比熱比とよばれる定数，p は気圧，ρ は空気の密度である。

物質量を n とすると，理想気体の状態方程式は，

$$pV = nR(t + 273.15)$$

と表される。ここで，R は気体定数である。

また，気体の質量を m，体積を V とすると密度 ρ は次の式で表される。

$$\rho = \frac{m}{V}$$

分子量を M とすると質量 m は次の式で表される。

$$m=nM$$

これらの式を用いて，理想気体の状態方程式を整理すると次の関係式になる。

$$p\frac{m}{\rho} = \frac{m}{M}R(t + 273.15)$$

結局，①の根号内の γ を除いた部分は，次の関係式になる。

$$\frac{p}{\rho} = \frac{R}{M}(t + 273.15) \quad \cdots ②$$

問８　①，②式より，音の伝わる速さが $v = 331.5+0.6\,t$ で表されることを導け。

ただし，$\sqrt{1+x} \fallingdotseq 1+\frac{1}{2}x$ と近似できるものとし，$M = 28.9\times10^{-3}$ kg/mol，$R = 8.31$ J/mol，$\gamma=1.4$ とする。

なお，精密な計算では $v = 331.5+0.6\,t$ だが，ここの数値では $v = 331.6+0.6\,t$ となる。

岡山県マスコット　ももっち