科学オリンピックへの道

岡山物理コンテスト2020

問題Ｂ

2020年10月17日（土）

14:45～15:45（60分）

問題にチャレンジする前に次の**＜注意事項＞**と**＜指数を用いた数の表記＞**をよく読んでください。問題は大問２題からなります。問題は一見難しく見えても，よく読むとわかるようになっています。どの問題から取り組んでも結構です。最後まであきらめずにチャレンジしてください。

＜注意事項＞

1．開始の合図があるまで，問題冊子（全10ページ）を開けてはいけません。
2．電卓を使用してもよろしい。
3．携帯電話やスマートフォンなどは電源を切り，カバンの中にしまっておきなさい。
4．解答はすべて解答用紙に記入しなさい。解答用紙は２枚です。必ずチャレンジ番号と氏名を記入しなさい。
5．気分が悪くなったりトイレに行きたくなったりした際は手を挙げて監督者に知らせなさい。
6．質問があるときは質問用紙に記入し，手を挙げて監督者に渡しなさい。
7．終了の合図があったら，ただちに解答を止め，チャレンジ番号と氏名を確認の上，監督者の指示を待ちなさい。
8．問題冊子は持ち帰りなさい。

＜指数を用いた数の表記＞

大きい数や小さい数を扱うときは，指数表記を利用し，$a\times10^{n}$ （$1\leqq a<10$）の形で表す。

$$1200 = 1.2\times10\times10\times10 = 1.2\times10^{3} \qquad 0.0012=\frac{1.2}{1000}=\frac{1.2}{10^{3}}=1.2\times10^{-3}$$

このように表すことで，大きな数や小さな数を簡潔に表現できる。

【例】　地球から太陽までの距離 ＝150000000 km ＝ 1.5×10^{8} km

電子の質量 ＝0.00000000000000000000000000000091 kg ＝ 9.1×10^{-31} kg

また，指数表記をしたときの，先頭から３つ目の数字を四捨五入して表した数を「有効数字２桁」という。

【有効数字２桁の例】　3.14 ⇒ 3.1　　3776 ⇒ 3.8×10^{3}　　0.0125 ⇒ 1.3×10^{-2}

＜参考＞

【三角比】

直角三角形の直角でない角の大きさが１つ決まれば，３辺の比が決まる。図１のように３辺の長さと角の大きさをそれぞれ a, b, c, θ とすると，正弦（sin : サイン），余弦（cos : コサイン），正接（tan : タンジェント）は以下のように定義される。

正弦　$\sin\theta = \dfrac{a}{c}$　　余弦　$\cos\theta = \dfrac{b}{c}$　　正接　$\tan\theta = \dfrac{a}{b}$

これらを三角比という。

また，直角三角形の１つの辺の長さと１つの角の大きさが決まれば，残りの辺の長さを三角比を用いて表すことができる。

例　$a = c\sin\theta$ ，$b = c\cos\theta$

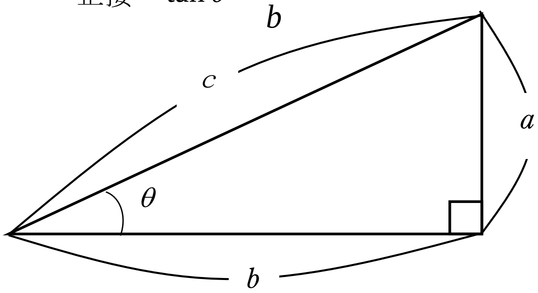

図１

【弧度法】

角度を表すのに，180°や 360°のように，〔°〕という単位を使って表す度数法は日常生活で広く使われている。一方，数学や物理では，弧度法と呼ばれる表し方を用いる場合が多い。この表し方は次のように定義される。

半径と等しい長さの弧を持つおうぎ形の中心角の大きさを１ラジアン（記号 : rad）という。この rad を単位とした角の表し方を弧度法という。１つのおうぎ形において，弧の長さは中心角に比例するので，図２のような半径 r のおうぎ形において，中心角 θ〔rad〕に対する弧の長さを x とすると，

$x = r\theta$　　（　または　$\theta = \dfrac{x}{r}$　）

したがって，半径 r の円では，円周は $2\pi r$ であるから，

$$\theta = \frac{x}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{〔rad〕}$$

よって，度数法との間に次の関係が成り立つ。

$360° = 2\pi$〔rad〕

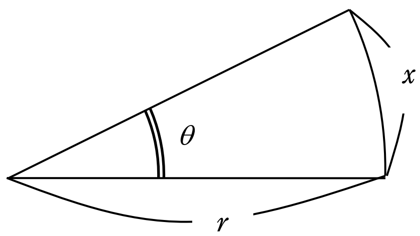

図２

【単位の主な接頭語】

記号（読み）	大きさ	記号（読み）	大きさ
G（ギガ）	10^9	c（センチ）	10^{-2}
M（メガ）	10^6	m（ミリ）	10^{-3}
k（キロ）	10^3	μ（マイクロ）	10^{-6}
h（ヘクト）	10^2	n（ナノ）	10^{-9}

第１問

ばねの上に板をのせ, つりあいの位置からわずかに変位させて手をはなすと, 板は上下に周期的な振動（単振動）を行う。この単振動の周期について考察する。ただし，重力加速度の大きさを g とし，板の大きさは無視できるものとする。

図１－１のように自然長 ℓ_0 でばね定数 k のばねに質量 m の板をのせて静止させた。

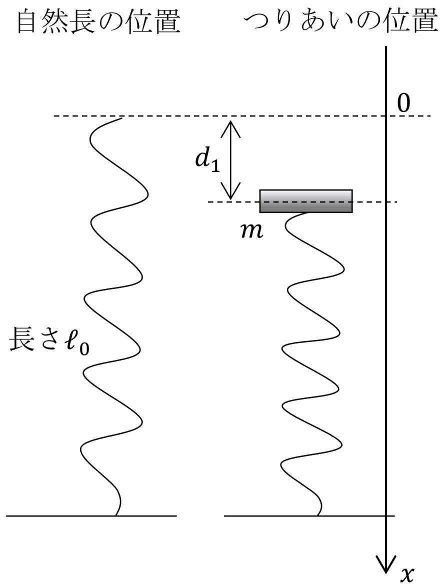

図１－１

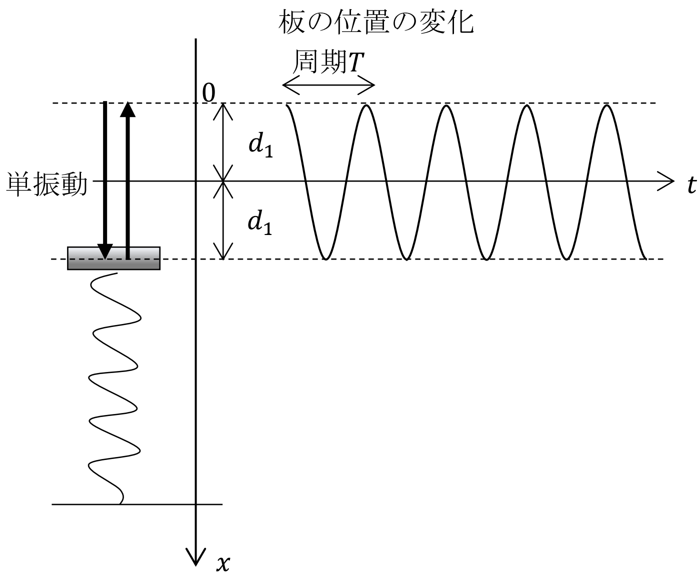

図１－２

問１　つりあいの位置でのばねの縮み d_1 を，m ，g ，k を用いて表せ。

次に，つりあいの位置でのばねの縮み d_1 を，エネルギーを用いて考察する。ここでは，鉛直下向きを x 軸の正の向きとし，ばねの自然長の位置を原点とする。

問２　板が位置 x にあるとき，板の重力による位置エネルギー U_1 とばねの弾性力による位置エネルギー U_2 の和を，x ，m ，g ，k を用いて表せ。ただし，重力による位置エネルギーは，原点$(x = 0)$を基準とする。

問３　板の重力による位置エネルギー U_1 と，ばねの弾性力による位置エネルギー U_2 の和が最小となる位置 x を求めよ。

次に，板を自然長の位置まで持ち上げて静かに手をはなすと，板は上下に振動する。このとき，板の位置（変位）は**図１－２**に示すように，$x=2d_1$の位置で折り返し，つりあいの位置で速さは最大となる。この繰り返しの時間を周期 $T\left(=\frac{2\pi}{\omega}\right.$，$\omega$は角振動数$)$という。ただし，$\ell_0>2d_1$である。

手をはなした瞬間を $t=0$とすると，時刻 tでの板の位置は $x=d_1(1-\cos\omega t)$ で表され，d_1が振幅となる。速度は変位の時間変化であるので，v は $v=\frac{\Delta x}{\Delta t}=d_1\omega\sin\omega t$ で表される。

運動エネルギーを Kとすると，力学的エネルギー Eは $E=K+U_1+U_2$ ⋯ (A)で表される。xとvの式を用いて力学的エネルギー Eの時間的変化を表すと，

$$E=\frac{1}{2}m\left(d_1\omega\sin\omega t\right)^2-mgd_1\left(1-\cos\omega t\right)+\frac{1}{2}k\left\{d_1\left(1-\cos\omega t\right)\right\}^2$$

となる。

問４　**図１－３**は，式 (A) の K , U_1 , U_2 の時間変化の様子を表している。K , U_1 , U_2 の組み合わせとして最も適切なものを，①～⑥から１つ選べ。

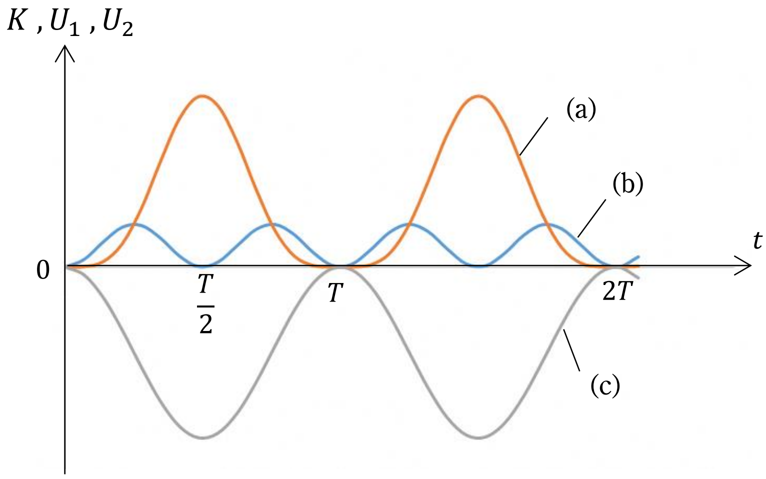

図１－３

	K	U_1	U_2
①	(a)	(b)	(c)
②	(a)	(c)	(b)
③	(b)	(a)	(c)
④	(b)	(c)	(a)
⑤	(c)	(a)	(b)
⑥	(c)	(b)	(a)

問５　力学的エネルギー保存則から，力学的エネルギー E は時刻によらず一定である。$\omega t = 0$のときと，$\omega t = \frac{\pi}{2}$ のときの力学的エネルギー E を比較することにより角振動数 ωを，mとkを用いて表せ。

以上より，$T = \frac{2\pi}{\omega}$ に ω を代入すると，単振動の周期を求めることができる。
なお，単振動の周期は，運動方程式を解くことで求めることもできる。

（次のページに続く）

地上から約 400km 上空に建設された巨大な有人実験施設（**図１−４**）国際宇宙ステーション（ISS）での体重測定について考察する。宇宙飛行士は体調管理の面から月に一度体重測定をすることが義務付けられている。ISS では重力が非常に小さいので，通常の体重計は役に立たない。そこで，**図１−５**のようにばねの上に乗って上下に何度も揺さぶられながら，単振動の周期やばねに押し返されるときの加速度から体重を測定する。

今回は，周期から体重を測定する場合について考察する。

図１−４　ISS の様子
出典：JAXA｜ 宇宙航空研究開発機構

図１−５　体重測定の様子
出典：JAXA｜ 宇宙航空研究開発機構

問６　今，**図１−６**の模式図のように質量 mの板をのせたばね定数kのばねを十分に縮めた状態で固定して静止させた。その上に質量 Mの人が乗り，固定を外したところ，単振動を行い，その周期は T_0であった。このとき，人の質量 Mを m ，T_0 ，kを用いて答えよ。

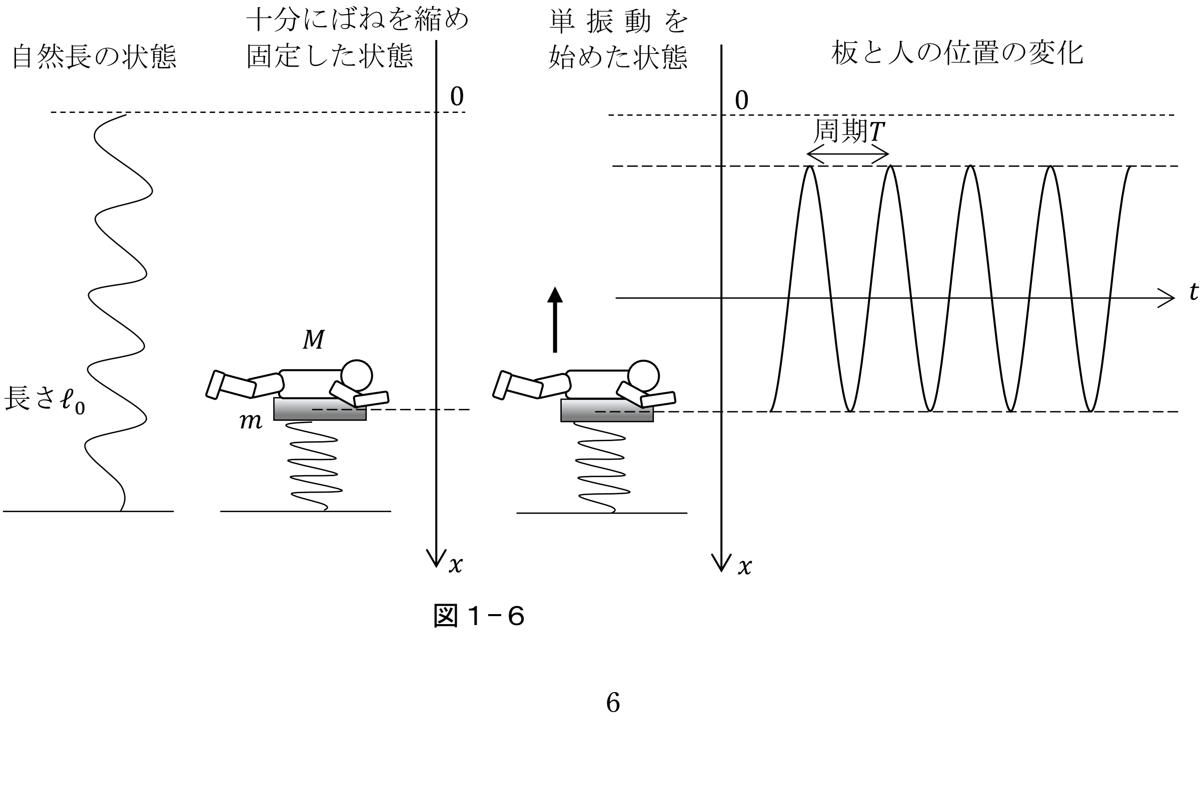

図１−６

第２問

温度を測る温度計には大きく分けて，接触型と非接触型がある。従来，体温計として広く用いられていたのは，接触型（図２−１）である。温度計と測定物の温度が等しくなる（熱平衡），あるいはその過程を計測することで温度がわかる。

太陽表面のように遠い場合や，鉄の製造工程のような高温の場合は，非接触型（図２−２）を用いる。また，非接触型はごく短時間で測定できるものがあるため，対象が動く場合も非接触型が適している。

図２−１　接触型温度計（体温計）

図２−２　非接触型温度計（体温計）

では，非接触型温度計が温度を測定する原理を考えてみよう。我々の人体や身の周りの物体など，物質を構成している原子や分子は，熱運動という振動をしている。この振動は温度が高いほど激しく，運動している原子や分子は周囲に電磁波を放出する（図２−３）。電磁波はその波長の違いによって様々な種類があるが，ここで主に放出されるのは波長が400〜780nmの可視光や，780nm〜1000000nmの赤外線である。高温に熱した鉄などの金属が，赤く，あるいはオレンジ色に輝く。たき火の後，火が消えた炭や灰がまだ赤く光っているときに近づくと熱い。これらはみな，高温になった物体から放出される可視光や赤外線の現象である。

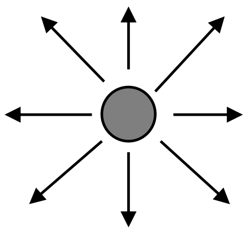

図２−３　電磁放射

人も温度に応じた電磁波を出している。それは赤外線の領域である。

物体の温度 Tが高くなるほど多くの赤外線が放出されることは以前から知られていた。オーストリアのシュテファンは1879 年，物体の温度 Tと，物体表面の単位面積から単位時間に放出される赤外線や可視光など電磁波の総量（エネルギー密度）I〔W/m^2〕との関係（式①）を実験的に見出した。この関係から，赤外線や可視光の量を測定すれば，その物体の温度 Tがわかる。

$$I = \sigma T^4 \quad （\sigma は比例定数，\sigma＝5.67\times10^{-8}\ \mathrm{W/(m^2・K^4)}）\quad \cdots①$$

T：絶対温度：絶対零度（−273℃）を 0 とした温度。単位は〔K〕(ケルビン)
水の融点（0℃）は 273K，水の沸点（100℃）は 373K となる。

ここでシュテファンの功績を実験的に確かめたい。**図２−４**のように，十分に体積の大きい断熱された箱 A を用意する。箱 A の中の温度 Tは一定に保つことができ，接触型の温度計で測定できる。箱 A の一部に小さな穴をあけ，穴の正面に内面を鏡のように磨いた箱 B を設置する。箱 B の内部を水で満たすと，箱 A の内部から放出される電磁波が穴から箱 B に入り，水温が上昇する。

箱 A の中の温度 T を**表**の各温度に一定に保ちながら，それぞれの場合の水温 tの変化を調べたところ，**表**のようになった。

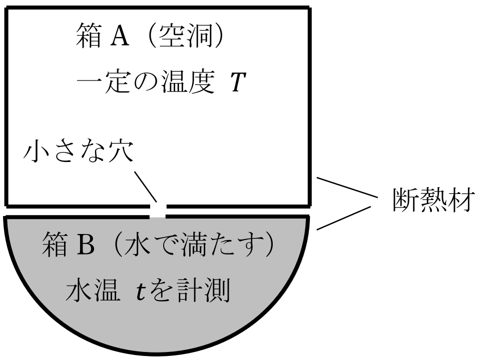

図２−４

表　水温 t〔K〕の変化

T ＼ 時間	0 分	10 分	20 分	30 分	40 分	50 分	60 分	温度 T の４乗	温度変化
600K	300	300.10	300.20	300.30	300.40	300.50	300.60		
800K	300	300.32	300.64	300.96	301.28	301.60	301.92		
1000K	300	300.80	301.60	302.40	303.20	304.00	304.80		
1200K	300	301.66	303.32	304.98	306.64	308.30	309.96		

問１　箱 B の水が単位時間あたりに受け取った熱量 Q〔W〕は，水の質量 m〔g〕，水の比熱c〔J/(g·K)〕，箱 B の水の単位時間あたりの温度変化 Δt〔K〕を用いて次のように表せる。

$$Q = mc\Delta t$$

一方，比（分数）が常に一定である２つの物理量の関係を比例と呼ぶ。熱量 Q〔W〕と，温度変化 Δt〔K〕が比例することを上の式を用いて示せ。

問２　箱 A の設定温度 T〔K〕を横軸に，箱 B の水の 10 分あたりの温度変化 Δt〔K〕を縦軸にとって，グラフをかけ。

問３　箱 A の穴から放出される電磁波の単位面積・単位時間あたりのエネルギー密度 I〔W/m^2〕が，箱 A の中の温度T〔K〕の４乗におおよそ比例することを**表**の結果を用いて示せ。ただし，箱 A の穴から放出された電磁波のエネルギーは，すべて箱 B の水の温度変化に使われたものとする。

問４　太陽は莫大なエネルギーを宇宙空間に放出している。あらゆる向きに放出されたエネルギーのうち，太陽から1.5×10^8km 隔てた地球表面（大気の上）には 1.37×10^3J/(m^2・s)（1 秒間に1m^{2}あたり1.37×10^3J）のエネルギーが届く。太陽が 1 秒間に放出する全エネルギーはいくらか。

問５　式①を使って太陽表面の温度を計算せよ。太陽の半径は 7.0×10^5kmとする。

シュテファンの見つけた法則は，弟子のボルツマンによって熱力学だけでなく電磁気学の考えを用いて，理論的に証明された。

鉄を熱すると，温度の上昇とともに，はじめ赤く光りだし，やがて橙に，さらには白っぽい光へと色が変わる。この現象は鉄に限らず，物体一般について観測できる。このことは物体の温度Tによって放出される電磁波の波長 λ の分布が異なることを示している。逆に考えると，放出される電磁波のある波長 λ の分布を調べれば，その物体の温度 Tがわかるはずである。

ドイツのプランクは，電磁波が放出されるとき，ある決まった量のエネルギーをひとかたまりとして放出されていると考えた。

プランクはこの考えをもとに，ある温度 Tの物体から放出される特定の波長 λ の電磁波の放射強度（放射されるエネルギー密度）I を算出する式②を導いた。**図２−５**はその式をグラフにしたものである。特定の波長だけを見れば，温度Tが高いほど放射強度が高いことがわかる。

$$I\left(\lambda\,,\,T\right)=\frac{2hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{e^{hc/k\lambda T}-1}\quad\cdots②$$

h：プランク定数　c：真空中の光速（定数）　k：ボルツマン定数　e：ネイピア数（定数）

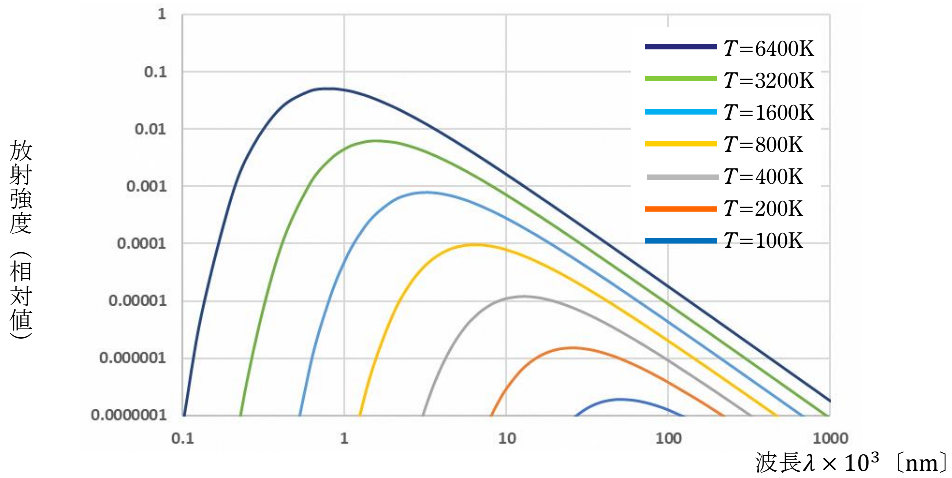

図２−５　各波長の放射強度

この式②から，ある特定の波長について，電磁波の放射強度を測定すれば，物体に接触させることなく温度を求めることができるのである。例えば，このグラフにおいて，100×10^3 nm の波長の電磁波の放射強度が 0.00001（相対値）であれば，物体の温度は 3200 K ということがわかる。

実際の体温測定では，測定する物体の物質によって放射する電磁波の全体の量が変化することに注意しなければならない。人間の肌とそれ以外とで放射強度が異なるため，肌から出た電磁波のみを測定する必要がある。このため測定部には，**図２−６**のようなコーン（円錐形の穴）があり，コーンの外側から入射した電磁波は，コーンの奥に到達できない。開き角度 θの内側に，対象物から放出された電磁波だけが入るためには，温度計を一定距離まで近づける必要がある。

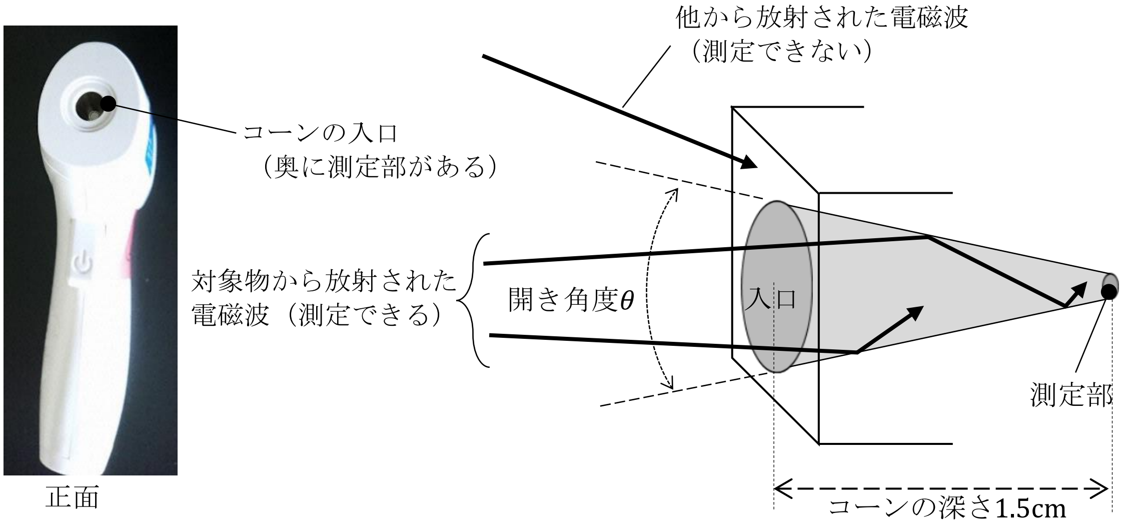

図２−６　非接触型温度計のコーンの形状

問６　子どもの体温を測る場合，コーンの入口と子どもの額の間の距離は，いくら以下でなければならないか。ただし，子どもの額の大きさを直径３cm，コーンの深さを1.5cm，開き角度を40°とし，三角比は次の表の値を用いよ。

tan10°	0.18
tan20°	0.36
tan40°	0.84
tan80°	5.7

岡山県マスコット　ももっち