

<参考>

【三角比】

直角三角形の直角でない角の大きさが1つ決まれば、3辺の比が決まる。図1のように3辺の長さ、角の大きさをそれぞれ a 、 b 、 c 、 θ とすると、正弦 (sin : サイン)、余弦 (cos : コサイン)、正接 (tan : タンジェント) は以下のように定義される。

$$\text{正弦} \quad \sin \theta = \frac{a}{c} \quad \text{余弦} \quad \cos \theta = \frac{b}{c} \quad \text{正接} \quad \tan \theta = \frac{a}{b}$$

これらを三角比という。

また、直角三角形の1つの辺の長さと1つの角の大きさが決まれば、残りの辺の長さを三角比を用いて表すことができる。

例 $a = c \sin \theta$ 、 $b = c \cos \theta$

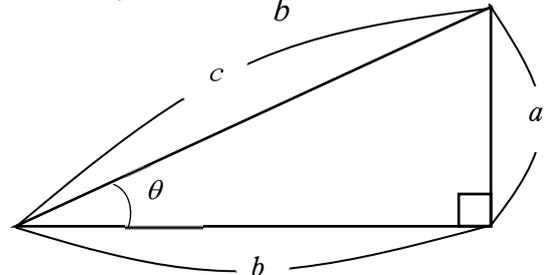


図1

【弧度法】

角度を表すのに、 180° や 360° のように、 $[\circ]$ という単位を使って表す度数法は日常生活で広く使われている。一方、数学や物理では、弧度法と呼ばれる表し方を用いる場合が多い。この表し方は次のように定義される。

半径と等しい長さの弧を持つおうぎ形の中心角の大きさを1ラジアン (記号 : rad) という。この rad を単位とした角の表し方を弧度法という。1つのおうぎ形において、弧の長さは中心角に比例するので、図2のような半径 r のおうぎ形において、中心角 θ [rad] に対する弧の長さを x とすると、

$$x = r \theta \quad \left(\text{または} \quad \theta = \frac{x}{r} \right)$$

したがって、半径 r の円では、円周は $2\pi r$ であるから、

$$\theta = \frac{x}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{ [rad]}$$

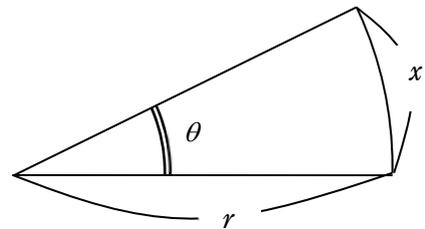


図2

よって、度数法との間に次の関係が成り立つ。

$$360^\circ = 2\pi \text{ [rad]}$$

【単位の主な接頭語】

記号 (読み)	大きさ	記号 (読み)	大きさ
G (ギガ)	10^9	c (センチ)	10^{-2}
M (メガ)	10^6	m (ミリ)	10^{-3}
k (キロ)	10^3	μ (マイクロ)	10^{-6}
h (ヘクト)	10^2	n (ナノ)	10^{-9}

第1問

スマートフォンで音楽を聴くとき、周囲のノイズの影響を激減できることからアクティブノイズキャンセリングイヤホンが人気となっている。アクティブノイズキャンセリングとは、周囲のノイズ（ノイズ）を打ち消す（キャンセル）機能である。アクティブノイズキャンセリングイヤホンは内蔵されたマイクで周囲のノイズを検出し、ノイズと逆の波形（「逆位相」という）の音を生成してイヤホンから流している。逆位相の音によって周囲のノイズを打ち消すことで、ノイズを小さくできるのである。このアクティブノイズキャンセリングイヤホンについて考えよう。

〔A〕 まずはノイズキャンセリングの仕組みについて考えよう。

イヤホンに内蔵されているマイクと鼓膜との距離によって、ノイズがマイクで拾われてから鼓膜に届くまでには一定の時間（「タイムラグ」という）がかかる。そのため、ノイズを打ち消すには、逆位相の音がタイムラグの分だけ遅れてイヤホンから流れるようにし、ノイズと同時に鼓膜に届かせる必要がある。

問1 図1-1のような構造のイヤホンを考える。マイクがノイズを検知した後、何s遅れてイヤピースから逆位相の音が出ればよいか求めよ。ただし、音速を 340 m/s とする。

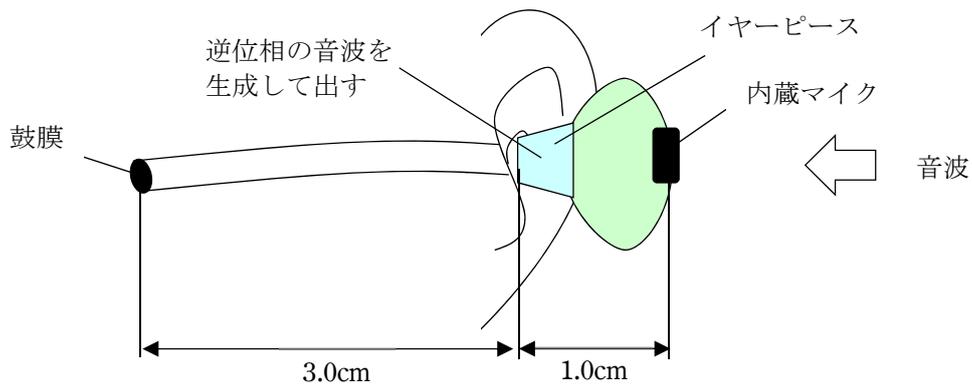


図1-1

実際には、周囲のノイズを打ち消す音を生成する処理には、このタイムラグよりも長い時間がかかる。このため、逆位相の音はノイズより遅れて鼓膜に達することになり、振動数の大きいノイズの波形はうまく打ち消されないことがある。

問2 ノイズの波形が図1-2のようになっているとき、このノイズを打ち消すために必要な音の波形として正しいものを次の①～④から1つ選べ。

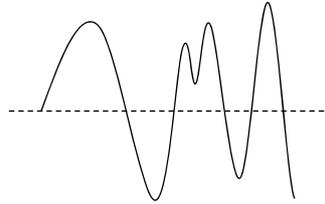
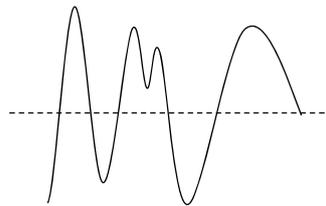
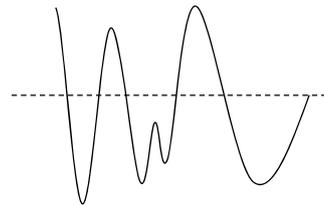


図1-2 ノイズの波形

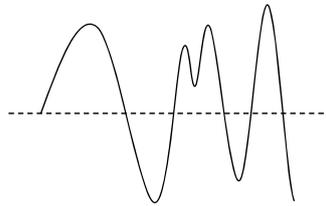
①



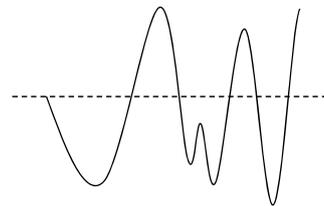
②



③



④



(次の問題へ続く)

[B] 次に周囲のノイズを取り込む内蔵マイクについて考えよう。

マイクの種類のひとつに「コンデンサーマイク」がある。コンデンサーマイクは感度が高く、レコーディング用マイクやスマートフォンの内蔵マイクなどに幅広く用いられている。

コンデンサーマイクの構造を模式的に表したのが図1-3である。その名の通り、コンデンサーの仕組みを用いている。コンデンサーとは、平行にした2枚の金属板（極板）に電圧を加えることで、極板に電気が蓄えられる装置である。極板に蓄えられる電気量 Q は極板間の電位差 V に比例する。その比例定数を電気容量といい、 C で表す。これらの関係を式で表すと次のようになる。

$$Q = CV$$

さらに電気容量 C は、極板間の物質（「誘電体」という）の誘電率を ϵ 、極板の面積を S 、極板間の距離を d とすると、

$$C = \epsilon \frac{S}{d}$$

と表すことができる。

コンデンサーマイクは薄く軽い膜に金属を蒸着させた「振動板」と、固定された金属板の「背極」を極板とするコンデンサーとなっている。振動板が音波によって振動すると、振動に合わせて極板の間隔が変化するので、コンデンサーの電気容量が変化し、極板に蓄えられる電気量も変化する。この変化を電気信号として取り出すことで、音を電気信号に変換することができる。

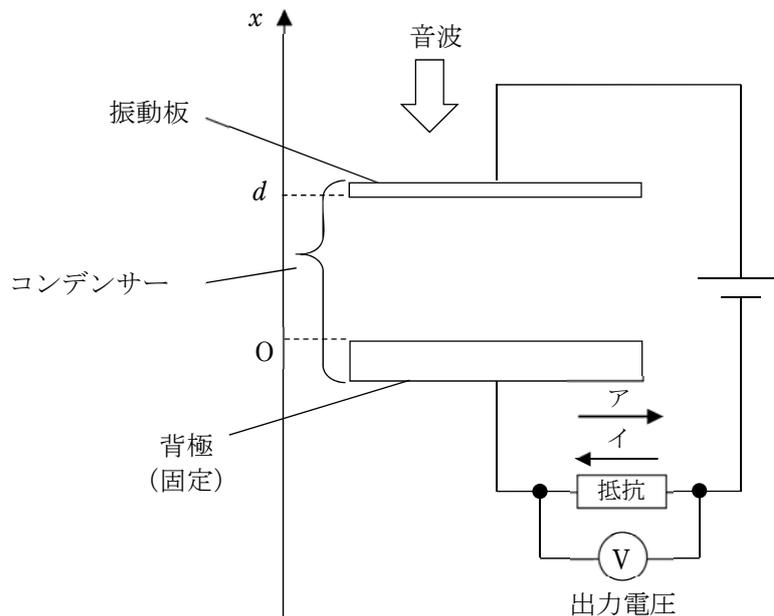


図1-3

問3 図1-3のように x 軸をとり、背極の位置を原点 O 、静止しているときの振動板と背極の距離を d とする。振動板が振動すると、極板に蓄えられる電気量が変化するため、回路内を電荷が移動し、抵抗に電流が流れる。このとき抵抗に生じる電圧降下の変化からノイズの波形がわかる。コンデンサーの極板間の距離が d のとき、極板に蓄えられる電気量が Q であった。振動板が x 軸の正の向きに Δd だけ動くとき、コンデンサーの電気容量、極板に蓄えられる電気量、抵抗に流れる電流の向きの組み合わせとして正しいものを①～⑧から1つ選べ。ただし、コンデンサーの電気容量は小さく、電気容量の変化に対して極板に蓄えられる電気量は瞬間的に変化するものとする。

	コンデンサーの電気容量	極板に蓄えられる電気量の大きさ	抵抗に流れる電流の向き
①	大きくなる	大きくなる	ア
②	大きくなる	大きくなる	イ
③	大きくなる	小さくなる	ア
④	大きくなる	小さくなる	イ
⑤	小さくなる	大きくなる	ア
⑥	小さくなる	大きくなる	イ
⑦	小さくなる	小さくなる	ア
⑧	小さくなる	小さくなる	イ

問4 問3のとき、抵抗を通過する電気量の大きさを求めよ。ただし、 d 、 Δd 、 Q を用いて表せ。ただし、図1-3の電圧計を流れる電流は無視できるものとする。

[C] イヤホン内部では、内蔵マイクで得たノイズの波形をもとに逆位相の波形の電気信号が生成される。生成された電気信号はノイズを打ち消すことのできる適切な大きさに増幅回路（アンプ）で増幅されスピーカー（ドライバーユニット）を鳴らす。（図1-4）。

音の大きさは、単位面積当たりのエネルギーと、面積の積であるとする。また、音は耳の中を広がらずに平行に進むものとする。

イヤホンをつけないとき、ノイズの単位面積当たりのエネルギーを E とすると、聞こえるノイズの大きさは、耳の穴の断面積 S を用いて ES となる。イヤホンを通過する際にノイズの大きさが k 倍 ($0 < k < 1$) に弱まるとすると、イヤホンを素通りして聞こえてくるノイズの大きさは kES となる。

また、イヤホンの外側にある内蔵マイクで集音されるノイズの大きさは、マイクの受音部の面積 S_M を用いて ES_M で表される。内蔵マイクが音を電気信号に変換する効率を m 倍 ($m < 1$) とする。

さらに、ドライバーユニットとイヤピースをあわせて、電気信号が音波に変換される効率 n 倍 ($n < 1$) とする。ノイズを打ち消すためには、ノイズとノイズキャンセリングの音が同じ大きさになればよい。このため、内蔵マイクから出る電気信号に対する、ドライバーユニットに入る電気信号の倍率 h は次のようになる。

$$h = \frac{kS}{mnS_M}$$

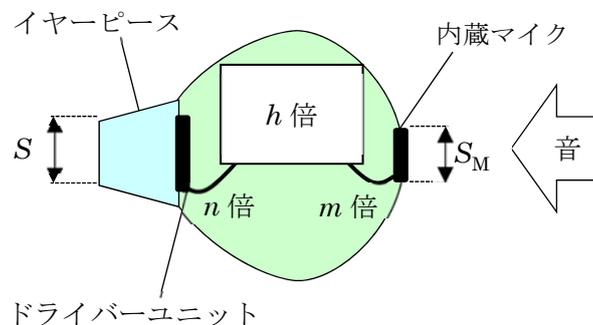


図1-4

問5 ワイヤレスのイヤホンを開発するとき、バッテリーを極力長持ちさせるような工夫がなされる。そこで、ノイズを打ち消すには、倍率 h を小さくしてアンプの消費電力を抑えるとよいと考えられる。倍率 h を小さくするためには、どうすればよいか、次の①～④から正しいものをすべて選べ。

- ① 感度を高めるため、内蔵マイクの受音部の面積 S_M を小さくする。
- ② イヤホンの遮音を高めることで、 k を小さくする。
- ③ 内蔵マイクを改良することで、内蔵マイクの変換効率 m を小さくする。
- ④ 高能率のドライバーユニットを用い、ドライバーユニットの変換効率 n を大きくする。

[D] アンプで増幅された電気信号はドライバーユニットに送られて音波が生成される。ドライバーユニットの構造や仕組みはスピーカーと同様である。この原理について考えよう。

問6 図1-5はドライバーユニットの基本構造を示している。磁石の近くに置かれたコイルにアンプで増幅した電流を流すとコイルが磁場から力を受け、コイルに結合した振動板が運動する。ドライバーユニットのはたらきについての記述として誤っているものを、次の①～⑥からすべて選べ。

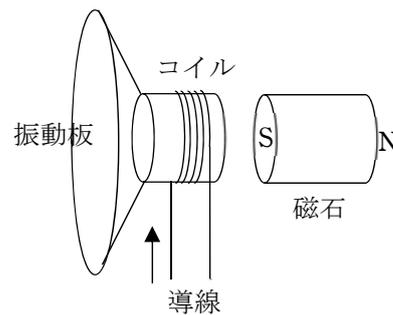


図1-5

- ① 周波数 f の交流電流をコイルに流すと、振動数 f の音波が発生する。
- ② コイルに一定の直流電流を流すと音波は発生しない。
- ③ 磁石の極性を逆向きにすると波形が変わって違う音色に聞こえる。
- ④ 音波が振動板を振動させると電磁誘導によりコイル両端に電圧が生じるので、マイクとしても使える。
- ⑤ コイルに流す電流を大きくすると、音が大きくなる。
- ⑥ 図1-5のように導線に矢印の向きに電流が流れているとき、コイルは左向きの力を受ける。

[E] このようにして、ノイズが打ち消された音が鼓膜に届く。

音声や楽器などの音の違い（音色）は、オシロスコープを用いると波形の違いとして観察できる。例えば図1-6.1のような100Hzの基本振動に2倍振動（200Hz）、3倍振動（300Hz）を重ね合わせた波形は図1-6.2のようになる。

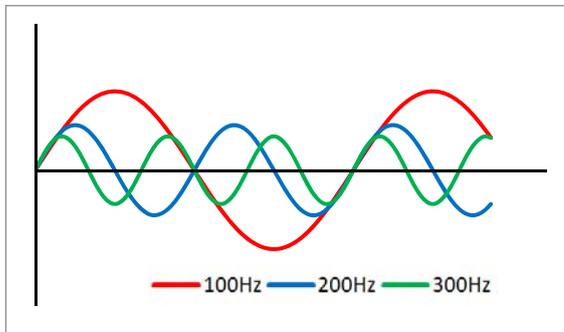


図1-6.1

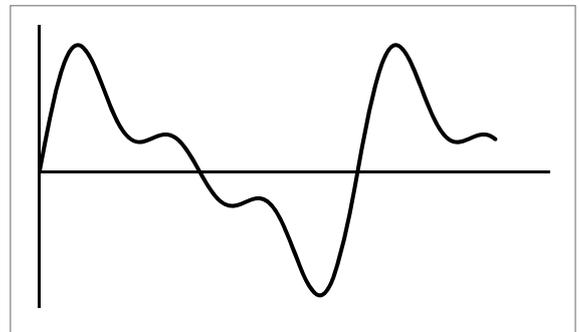


図1-6.2

また、次の図1-7.1のように振動の始まりがずれた場合は図1-7.2のようになり波形が変わってくる。

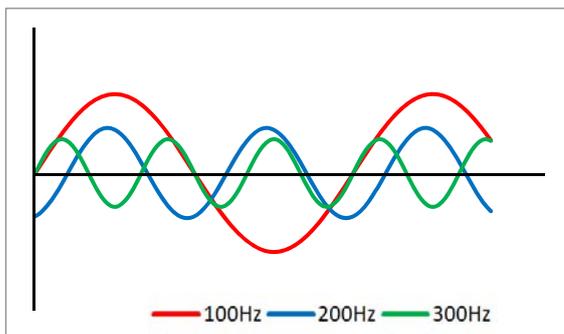


図1-7.1

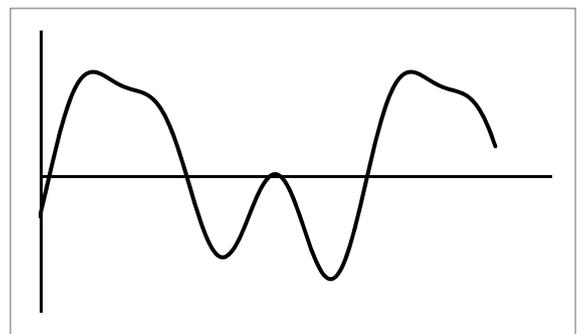


図1-7.2

しかし、人の耳には図1-6.2も図1-7.2も同じ音として聴こえる。つまり、厳密には波形の違いではなく、構成する振動の成分の違いが音色の違いとなるのである。

そこで、各音の強さを振動数ごとに分ける「フーリエ解析（スペクトル解析）」という方法がある。図1-8.1のチェロのラ（440Hz）の音をフーリエ解析すると、図1-8.2のように様々な振動数の音が混ざった複雑な音であることがわかる。

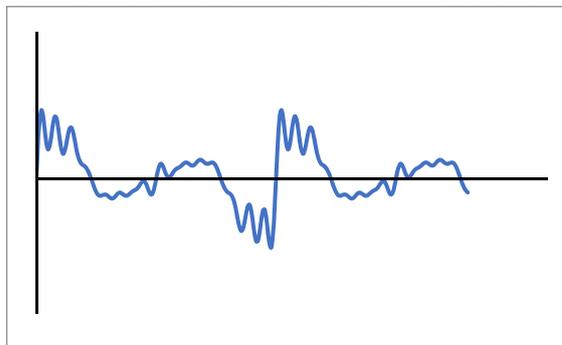


図1-8.1

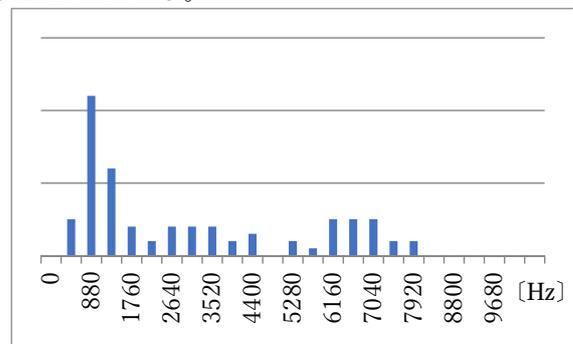


図1-8.2

問7 図1-6.1の音をフーリエ解析すると、図1-9のように表される。このとき最も少ない成分であった300Hzの波がノイズであったとする。300Hzの音のノイズキャンセリングの音を重ね合わせたときの波形はどのようになるか。その概形をかけ。ただし、解答用紙に薄く書かれているのは100Hzと200Hzと300Hzの波である。

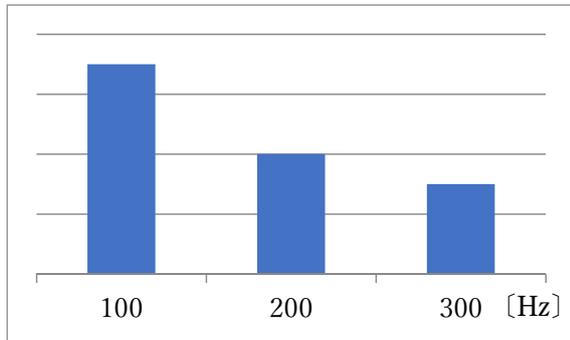


図1-9

第2問

のりや接着剤、釘、はんだ付けなどで何かを「接合」した経験があるだろう。例えばはんだ付けは、「はんだ」という合金を溶かして金属同士を接合する技術で、電子部品の配線などに用いる。

図2-1は教室の机の接合部分である。はんだは柔らかいので、机のパイプの場合、はんだ付けでは強度が不足危険である。そこで、接合したい金属そのものを溶かして接合する「溶接」という技術が用いられる。このうち、アーク（火花）で溶かす方法をアーク溶接という。図2-1



図2-1

はこのアーク溶接による接合である。アークは雷や静電気の放電に類似した放電現象で、強い発光と発熱を伴う。

アーク溶接(図2-2)では、図2-3のように接合したい金属(母材)と電極(溶接棒)を溶接機の電源装置に接続し、アークを発生させる。アーク溶接の際、電源装置が供給したエネルギーのうち、金属が受け取るエネルギーの割合は30~50%程度である。この割合を熱効率 e と呼ぶ。



図2-2

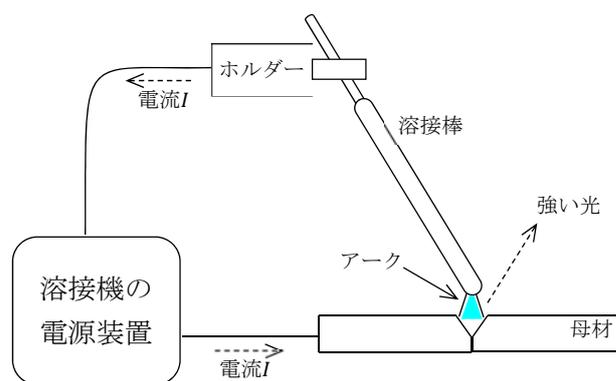


図2-3

問1 電源装置の電圧を V 、流れる電流を I として、単位時間に金属が受け取るエネルギー P を、 V 、 I 、および熱効率 e を用いて表せ。

図2-4のように、厚さ d の2つの金属板 A と B を突き合わせて溶接することを考えよう。2つの金属板と溶接棒は密度 ρ 、比熱 c 、融解熱 H の同じ金属で、融点のはじめの温度より ΔT 高いものとする。2つの金属板の突き合わせ部分が溝になるよう加工しておく。アークで母材と溶接棒が溶けると溝が埋まる。溶接棒を溝に沿って動かすと、連続的に溶けて溶接が進む。溝の断面は、底辺 $2d$ 、高さ d の直角2等辺三角形で、溶けた金属はぴったり埋まるとする。

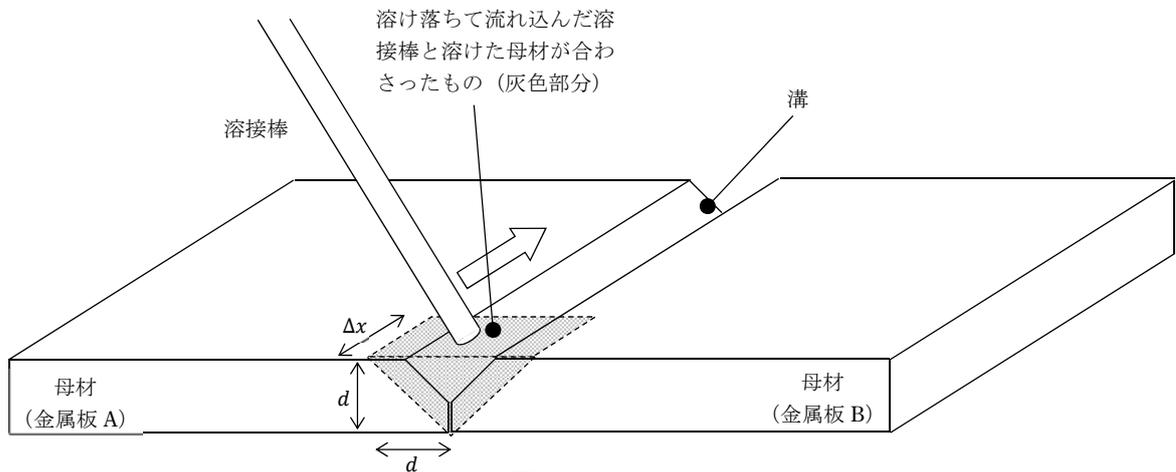


図2-4

問2 時間 Δt の間に、溶接棒が Δx だけ移動したとする。この間に図2-4の灰色の部分は溶けた溶接棒と溶けた母材で埋まる。溶接棒の溶けた部分と母材の溶けた部分が得た合計の熱量 Q を求めよ。ただし、溶けた後の金属の温度上昇は考慮しないものとする。

溶けた金属が冷えて凝固すると接合される。溶けた部分が小さすぎても大きすぎても、形が歪んだり強度が不足したりしてしまう。したがって溶接棒を適切な速度 v (溶接速度) で溝に沿って動かすことが重要となる。

問3 適切な溶接速度 v を、問1の P 、問2の Q 、 Δx を用いて求めよ。ただし、溶けていない部分の金属の温度上昇は考慮しないものとする。

アーク溶接は強い光を伴う。これは主に高温になった気体や金属の発光による。一般に、物質は 700℃程度で赤く発光しはじめ、さらに高温になると橙→白と色を変え、より強く光る。溶鉱炉や鍛冶、吹きガラス、焚火やバーベキューの炭、電球、太陽などが光るのはこの現象である。

太陽からは可視光のほか、目に見えない紫外線や赤外線も放射されている。これらや電波などはすべて電磁波という波の一種である。室温程度の物質では可視光は放出されないが、赤外線は放出されている。このような電磁波の放射と温度の関係を、1879年、Joseph Stefan（ヨーゼフ・シュテファン）が実験的に見出した。

Stefan は鉄を熱し、温度 T を上げながら電磁波の放射量 E を測定したところ、次の関係が得られた（表 1、図 2-5）。なお、単位 K（読み「ケルビン」）は絶対温度を表し、絶対零度 (-273℃) を基準とした温度（例：273K は 0℃）である。

表 1

温度 T [K]	放射量 E
400	1300
500	3100
600	6400
700	12000
800	20400

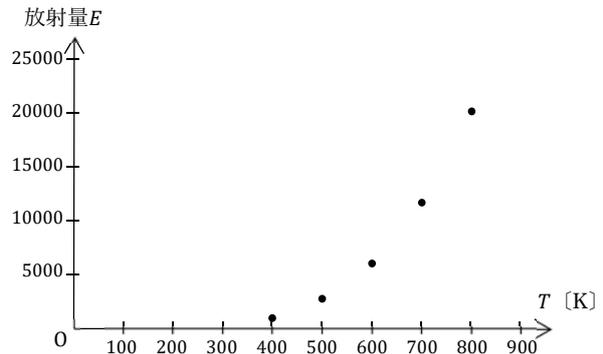


図 2-5

図 2-5 から、温度 T と放射量 E は定数 a 、 n を用いて、 $E = aT^n \dots ①$ の関係にあると仮定する。このとき、 E が 10 の何乗かという指数を Y 、 T が 10 の何乗かという指数を X として、図 2-5 を書き換える（図 2-6）。

そのグラフが直線になれば、式①の関係にあることが確かめられ、グラフの直線の傾きが n となる。（コラム 1）※コラムについては読まなくても解答できます。

コラム 1

対数とは「 $\log_a M$ 」の形で表され、その値は「 M は a の何乗か」を示す。例えば、「 $\log_{10} 1000$ 」と書くと、 $1000 = 10^3$ なので、その値は 3 である。

対数において、 $p > 0$ 、 $q > 0$ 、 $a > 0$ 、 $a \neq 1$ のとき、 $p = q$ であれば $\log_a p = \log_a q$ が成り立つ。

この関係を①式に用いると、 $\log_{10} E = \log_{10} aT^n \dots ②$ となる。

さらに、対数の公式 $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$ と $\log_a M^r = r \log_a M$ ($M, N > 0$) を用いると、

②式は $\log_{10} E = n \log_{10} T + \log_{10} a \dots ③$ となる。

ここで、 $\log_{10} E = Y$ 、 $\log_{10} T = X$ 、 $\log_{10} a = A$ とおくと、

③式は $Y = nX + A$ となり n が比例定数（グラフの傾き）の一次関数になる。

つまり、図 2-5 の縦軸、横軸を、10 の何乗かという対数の目盛りにすれば n がわかる。（図 2-6）

問4 図2-6を用い、式①の n を整数で求めよ。

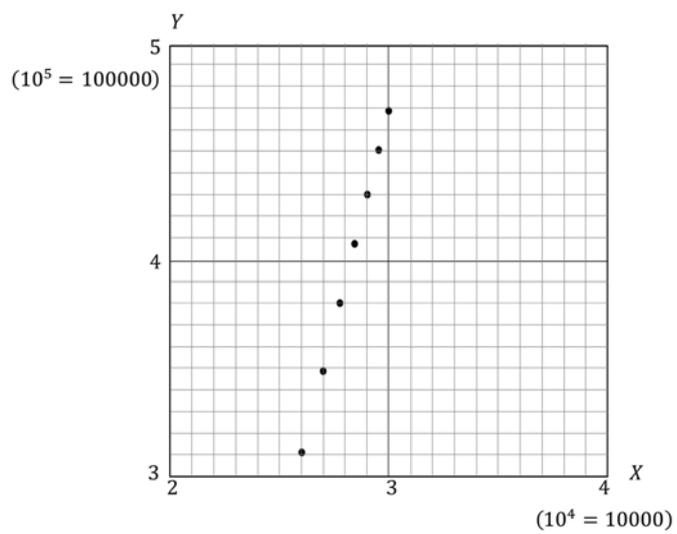


図2-6

Stefan の弟子 Ludwig Boltzmann (ルートヴィッヒ・ボルツマン) は 1884 年に、図 2-5 の関係を理論的に証明した。

電磁波は振動数 ν (読み「ニュー」) によって、電波、赤外線、可視光、紫外線などの種類に分けられる。そして物体の温度によってどの振動数の電磁波がどれだけ放射されるか決まっている (図 2-7)。このことは Gustav Kirchhoff (グスタフ・キルヒホッフ) が 1859 年に発見した (コラム 2)。

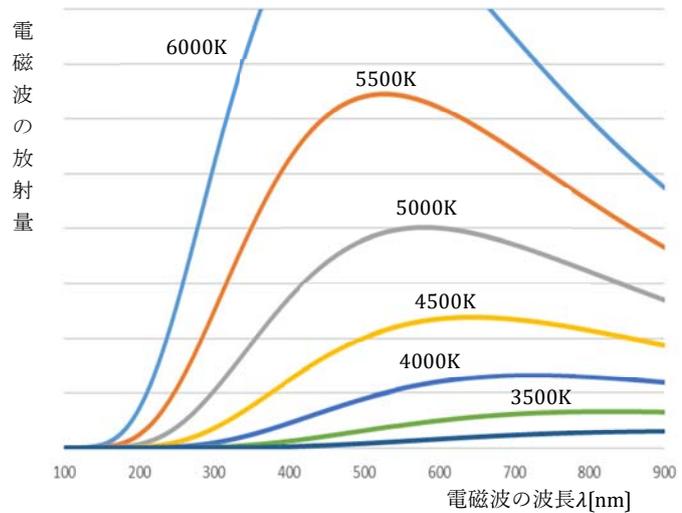


図 2-7

コラム 2

図 2-7 の関係は、電磁気学や熱統計力学などそれまでの物理学 (「古典物理学」という) の理論では説明できず、物理学は大きな壁にぶつかった。

しかし 1900 年、Boltzmann に師事したこともある Max Planck (マックス・プランク) が、「量子仮説」という全く新しい考えを導入し、次の公式を見出し解決した。

$$I = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/k\lambda T} - 1}$$

h : プランク定数 c : 光速
 k : ボルツマン定数

「量子仮説」とは、固体から出る光のエネルギーは $\frac{hc}{\lambda}$ という大きさの整数倍でなければならない (物理量はとびとびの値しかとることができない) というもので、人々の常識 (物理量は任意の値をとることができる) を根底から覆すものであった。「量子力学」の始まりである。量子仮説はアインシュタインの「光量子仮説」などを経て実証され、以後、量子力学は大きく発展した。量子力学によって、原子や分子、電子や光のふるまいが解明されることで、物質の性質や化学反応の仕組みが明らかになり、化学、薬学、医学、半導体、エレクトロニクスなど様々な分野が飛躍的に進展した。量子力学は、現在のコンピューター、スマートフォン、電子機器、医薬品や新素材など、現代の生活をあらゆる分野で支えている。

問5 製鉄所の溶鉱炉内部は赤く光り、アーク溶接は青白い光を発する。図2-8は、図2-7の縦軸のみを対数にしたグラフ（片対数グラフ）で、縦軸は電磁波の放射量の相対的な値である。アーク溶接の温度を約5000K、溶鉱炉内部の温度を約2000Kとみなし、アーク溶接が発する波長 $\lambda = 300\text{nm}$ の紫外線の放射量は、溶鉱炉内部が発する $\lambda = 760\text{nm}$ の赤色の光の放射量のおよそ何倍か。整数で答えよ。

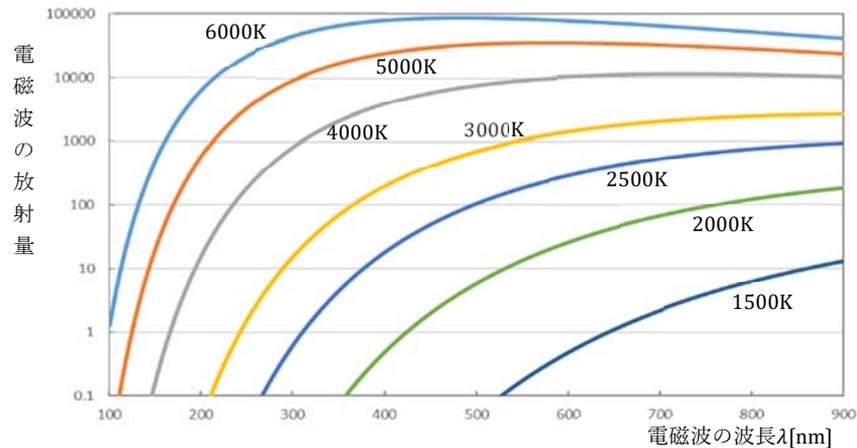


図2-8

アーク放電では、溶接棒から電気量 e を持つ電子が飛び出し、溶接棒と母材の間で電圧 V によって加速していると考えられる。絶対温度 T は、粒子の運動エネルギー K の大きさに比例 ($K = \frac{3}{2}kT$) する物理量なので、電子は溶接棒と母材の間の電圧 V から大きさ eV のエネルギーを得て、その分だけ温度が上がる。この場合は電子がもつ運動エネルギーによって、電子の温度が決まる。

問6 溶接棒から飛び出した初速度 0 の電子が、溶接棒と母材の間の電圧 20.7 V で加速した。この間、仮に電子が気体分子などと衝突しないとすると、母材に衝突する直前の電子の温度は何 K か。電子の電気量（電気素量） $e = 1.60 \times 10^{-19}$ C、ボルツマン定数 $k = 1.38 \times 10^{-23}$ J/Kを用いよ。

コラム3

実際には電子は気体分子と衝突し減速するため、アークの温度は5000~20000 Kとなるが、すさまじい高温である。このため強い紫外線が放射され、皮膚に当たると日焼けする。太陽の表面は約6000 Kであるから、目の前に小さな太陽があるに等しく、一般のサングラスでは大変危険である（図2-9はサングラス以外の部分が日焼けしたイメージ）。そこで、安全のため必ず図2-2のような専用の面（「溶接面」）を使い、皮膚や目を保護している。

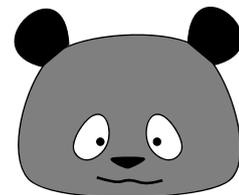


図2-9

金属を溶かす熱量が得られれば他の方法でも溶接できる。図2-10は2本の棒をつきあわせる「圧接」という溶接方法である。突き合せた棒の片方だけ（金属棒B）を回転させ、摩擦熱で金属を溶かす。

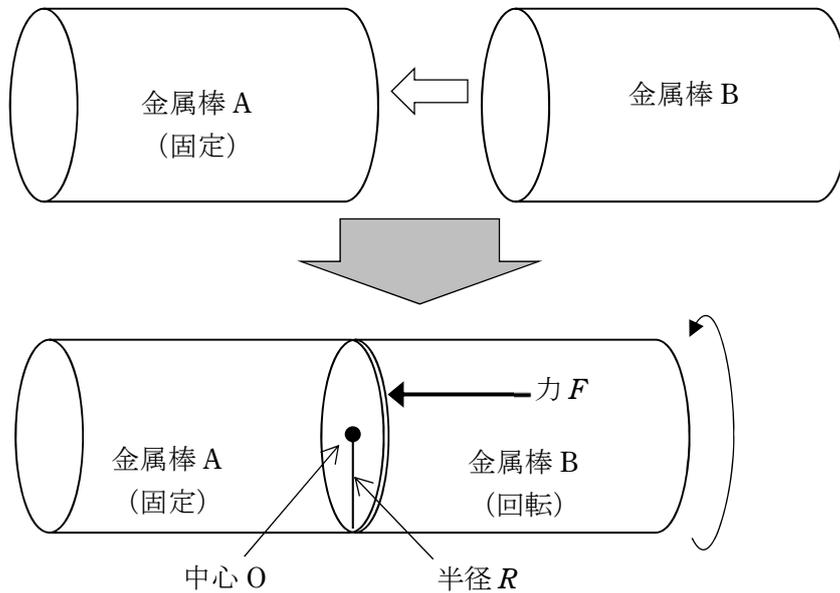


図2-10

押し付けた状態で、棒が一回転するとき発生する熱量 Q を計算してみよう。棒は円柱で断面は半径 R の円、棒には押し付ける方向に大きさ F の力がはたらいており、接触面での動摩擦係数は μ' とする。

問7 棒の断面にはたらく圧力 p の大きさを求めよ

問8 本文に続く、次の文章の（ア）～（オ）にあてはまる数式を答えよ。

次に棒の断面積を求める。断面の円の面積を公式を用いず求めてみよう。図2-11のように、断面を半径 R の円とし、中心から遠ざかる方向に r 軸をとる。

位置 r にある幅 Δr の円環を考える。円環の面積は、幅 Δr が非常に小さいので長さ $2\pi r$ 、幅 Δr の短冊の面積と等しいとみなせる。よってこの円環の面積は次のようになる。

（ア） $\times \Delta r$

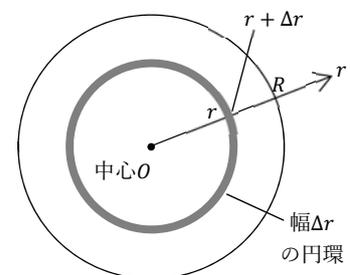


図2-11

位置 $r = 0$ のときの円環の面積はほぼ 0 であり、位置 $r = R$ のときの円環の面積は次のようになる。

(イ)

ここで図 2-12 のグラフを描く。横軸は r 軸の位置 r 、縦軸は円周の長さである。灰色部分が位置 r の円環の面積なので、 $r = 0$ から $r = R$ までのすべての円環の面積の和（すなわち棒の断面積）は、斜線部分（直角三角形）の面積と等しい。

したがって棒の断面積は、グラフの面積から πR^2 となる。

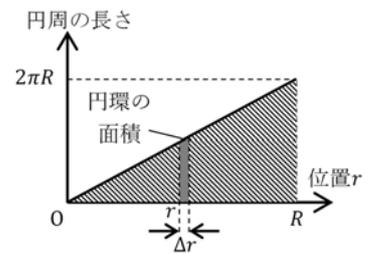


図 2-12

位置 r の円環にはたらく摩擦力 Δf は、円環の面積 ΔS と圧力 p 、 μ' を用いて (ウ) となる。

棒が一回転する間にこの円環がすべる距離 Δx は、 (エ) となる。

摩擦力 f は、図 2-12 の斜線部分の面積に圧力 p 、 μ' をかけたものであり、仕事 W はこれにすべる距離をかければよいから、仕事 W は図 2-13 のような四角錐の体積に p 、 μ' をかけたものとなる。

摩擦力 f によって発生する熱量 Q は、摩擦力 f による仕事 W と等しいと考えられる。棒を一回転させて発生する熱量 Q について、 F を用いて表すと次のようになる。

(オ)

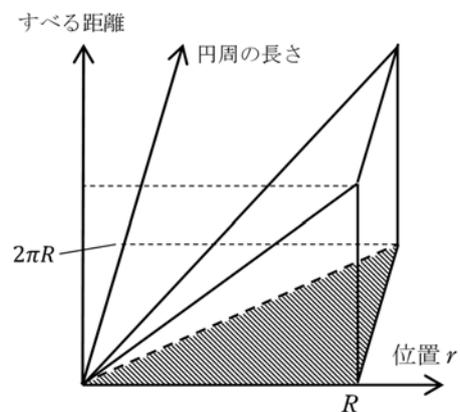


図 2-13

したがって、材料の直径 R に応じて必要なだけの力 F を加えれば、溶かすための適切な熱量を得ることができる。加える力は制御が容易であるため、圧接であれば自動化もしやすい。また、紫外線が出ないことも圧接のメリットである。このように用途に応じて様々な溶接技術が発展している。

コラム 4

近年は、レーザー溶接など様々な溶接技術が開発され、3Dプリンターへの応用、自動化、ゆがみや強度低下の最小化、高機能な材料での量産化などにより、我々の生活を向上させるとともに、地球環境への負荷低減にも貢献している。アークのふるまいには未解明のことも多く、現在も研究されている。熱統計力学はもちろん、流体力学（周囲の気体や溶けた金属の解析）や電磁気学（アークや電流の解析）、量子力学（電子やプラズマ化した粒子の解析）など、様々な分野の物理学や化学が必要となる。物理学の発展が他の分野を向上させるように、他の分野のニーズや経験も物理学を発展させてきた。君たちも物理学を机上のものにとせず、日常生活や社会に目を向け、よりよき未来を創る力となってほしい。



岡山県マスコット ももっち